目　　录

序

马尔可夫过程论是概率论的一个重要方面，也是目前国内外学者非常重视的一个数学分枝。可数状态的马尔可夫过程，不仅是一般状态马尔可夫过程的重要特例，而且还有它处理问题的特殊方法。基于此，作者才写作此书。

本书侧重可数状态的马尔可夫过程的分析理论，而对轨道理论，涉及较少。为了全书的系统性，在内容上，既包含了作者自己的部分研究成果，也收集了前辈在这方面的有关结果，特别是作者的老师——许宝騄教授生前领导的讨论班的部分结果。

严士健教授及北京师范大学许多同志对本书曾提出过许多宝贵意见，作者在此一并致谢。

由于作者学识浅薄，本书缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改进。

胡迪鹤

1982年于武汉大学

第一篇　可数状态的时齐的马尔可夫链

§ 1.　P链的概率空间，存在性定理

设$\boldsymbol{T}=\{0,1,2\cdots\}$为时间参数集，$E$为任一可数集（不妨令之为非负整数集）。再设$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是$E$上的转移阵，即是$P$满足

(1) $p_{i,j}\geqslant 0$，$(i,j\in E)$；

(2) $\sum\limits_{j\in E}p_{i,j}=1$，$(i\in E)$。

令Ω^*是乘积空间$E^T=\bigtimes\limits_{t\in T}E_t$，$E_t=E$，$(t\in\boldsymbol{T})$，$\Omega^*$中元素用$\omega=(\omega(0),\ \omega(1),\ \omega(2),\ \cdots)$表之。任取$A\subset E$，记

$\begin{bmatrix} n \\ A \end{bmatrix}=\{\omega|\omega(n)\in A\}$，特别地，若$A$是$E$中单点集$\{j\}$，则记$\begin{bmatrix} n \\ A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$.若$A_1,A_2,\cdots,A_n\subset E$,则记$\bigcap\limits_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} i_k \\ A_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_1, & \cdots, & i_n \\ A_1, & \cdots, & A_n \end{bmatrix}$.

令$\mathscr{F}^*=\sigma\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix};\ n\geqslant 0,\ j\in E\right)$为$\left\{\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix};\ n\geqslant 0,\ j\in E\right\}$所产生的$\sigma$代数。再定义：

$P^i\left(\begin{bmatrix} 0, & 1, & \cdots, & n \\ i_0, & i_1, & \cdots, & i_n \end{bmatrix}\right)=\delta_{i,i_0}p_{i_0,i_1}\cdots p_{i_{n-1},i_n}$，其中$\delta_{i,j}$当$i=j$时为1否则为0。用柯尔莫哥洛夫定理，$p^i$可以唯一地扩张到$\mathscr{F}^*$上去而得一概率测度。总之我们得到概率空间$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,p^i)$，$(i\in E)$。

再定义一族由Ω^*到Ω^*的推移算子$\theta_n(n\geqslant 0)$如下：任取$\omega\in\Omega^*$，定义$(\theta_n\omega)(m)=\omega(n+m)$，$(m\geqslant 0)$。显然：(1) $\theta_n^{-1}\begin{bmatrix}m\\A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+n\\A\end{bmatrix}$，$(m,\ n\geqslant 0,\ A\subset E)$，从而(2)$\theta_n^{-1}\mathscr{F}^*\subset\mathscr{F}^*$，$(n\geqslant 0)$。($\theta_n^{-1}\mathscr{F}^*$ 定义为：$\{A:A=\theta_n^{-1}(A^*),\ A^*\in\mathscr{F}^*\}$。)

任取$J\in\boldsymbol{T}$，记$E^J=\bigtimes_{t\in J}E_t$，$(E_t=E)$，特别地记$E^n=\bigtimes_{1\cdots 1}^{n}E_t$．对任意 $A\subset E^n$，记$\binom{(t_1,\cdots,t_n)}{A}=\begin{bmatrix}(t_1,\cdots,t_n)\\A\end{bmatrix}=\{\omega|\omega\in\Omega^*,(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in A\}$。为简便计，有时记$P^i(A\cap B)$为$P^i(A,B)$，$\begin{bmatrix}n\\A\end{bmatrix}=\overset{n}{A}$。

对$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$，有下述马尔可夫性：

$$(M):\quad P^i\left(\overset{(0,1,\cdots,n-1)}{A},\ \overset{n}{j},\ \theta_{n+1}^{-1}B\right)$$

$$=P^i\left(\overset{(0,1,\cdots,n-1)}{A},\ \overset{n}{j}\right)P^j(\theta_1^{-1}B).\qquad(1.1)$$

(其中$i\in E$，$n\geqslant 1$，$A\subset E^n$，$B\in\mathscr{F}^*$，$j\in E$)。

证 由于E^n是可数集，故只须证明 (1.1) 对$A=(i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_{n-1})$成立即可。若$B=\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}$，$(m\geqslant 0,\ k\in E)$，则

$$P^i\left(\overset{(0,1,\cdots,n-1)}{A},\ \overset{n}{j},\ \theta_{n+1}^{-1}B\right)$$

$$=P^i\begin{pmatrix}0, & 1,\cdots,n-1, & n, & n+1+m\\ i_0, & i_1,\cdots i_{n-1}, & j, & k\end{pmatrix}$$

$$=P^i\begin{pmatrix}0, & 1, & \cdots, & n-1, & n\\ i_0, & i_1, & \cdots, & i_{n-1}, & j\end{pmatrix}P^j\begin{pmatrix}m+1\\k\end{pmatrix}$$

$$=P^i\left(\overset{(0,1,\cdots,n-1)}{A},\ \overset{n}{j}\right)P^j(\theta_1^{-1}B).$$

易证使(1.1)成立的B成σ代数，所以对任何$B\in\mathscr{F}^*$，(1.1)成立。

由(M)可推出：

$$(M_1):\quad P^i\left(\theta_{n+1}^{-1}B \,\middle|\, \underset{A}{(0,1,\cdots,n-1)},\ \underset{j}{n}\right)$$
$$=P^i(\theta_1^{-1}B), \tag{1.2}$$

(其中$i\in E$, $n\geqslant 1$, $j\in E$, $A\subset E^n$, $B\in \mathscr{F}^*$, $P^i\left(\underset{A}{(0,1,\cdots,n-1)},\ \underset{j}{n}\right)>0$), 此处$P^i(M|A)$表$M$在条件$A$下的条件概率。

特别地，取$A=E^n$, (1.2)化为

$$P^i(\theta_{n+1}^{-1}B|\substack{n\\ j})=P^i(\theta_1^{-1}B). \tag{1.2$'$}$$

(1.2)的直观意义是：知道"现在"，"过去"和"将来"无关。这就是通常的马尔可夫性。若令X_n是Ω^*上的坐标函数，即是$X_n(\omega)=\omega(n)$, ($\omega\in\Omega^*$, $n\in\boldsymbol{T}$)，则称$X=(\Omega^*, \mathscr{F}^*, X_n, \theta_n, P^i)$, ($i\in E$)为$P$链，($\Omega^*$, $\mathscr{F}^*$, P^i) ($i\in E$)为P链的概率空间。

定义1.1. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间，E为可数集，$\boldsymbol{T}=\{0,1,2,\cdots\}$为时间参数集，$\{X_n;\ n\in\boldsymbol{T}\}$是一族定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 取值于E的随机变量，(即是对任何$n\in\boldsymbol{T}$, $j\in E$, 有$\{X_n=j\}\in\mathscr{F}$)，如果对任意的$n\geqslant 2$, $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$, 及任意$i_1,\cdots,i_n\in E$, 均有

$$P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$$
$$=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}), \tag{1.3}$$

(当(1.3)左边有意义时)，则称$\{X_n;\ n\in\boldsymbol{T}\}$是一个离散时间可数状态的马尔可夫过程，简称可数状态的马尔可夫链。E称为其状态空间。如果存在一个转移阵$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$，使

$$P(X_n=j|X_{n-1}=i)=p_{i,j},\quad (i,j\in E),$$

(当左边有意义时)，则称$\{X_n;\ n\in\boldsymbol{T}\}$是具有时齐的转移概率的可数状态的马尔可夫链，简称可数状态的时齐的马尔可夫链。本章所研究的，都是这类马尔可夫链。P称为$\{X_n;\ n\in\boldsymbol{T}\}$的转移阵，$\{P(X_0=i),\ i\in E\}$称为其初始分布。

容易证明：(1.3)等价于下述两条件中任何一条：

(1) $P(X_n=i_n|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})$
$$=P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}), \tag{1.4}$$

$(n\geqslant 1,\ i_0,\ i_1,\cdots,\ i_n\in E)$;

(2) $P(X_{t_\nu}=i_\nu,\ n\leqslant\nu\leqslant n+m\,|\,X_{t_\nu}=i_\nu,\ 1\leqslant\nu<n)$

$$=P(X_{t_\nu}=i_\nu,\ n\leqslant\nu\leqslant n+m\,|\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}),\ (1.5)$$

$(n\geqslant 0,\ 0\leqslant t_1<\cdots<t_n<\cdots<t_{n+m},\ t_\nu\in \boldsymbol{T},\ i_1,\cdots,\ i_{n+m}\in E)$.

定理1.1.（存在性定理）. 设E为可数集，$\boldsymbol{T}=\{0,1,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是转移阵，$\{\mu_i,\ i\in E\}$是一个概率分布（即$\mu_i\geqslant 0$，$\sum_{i\in E}\mu_i=1$），则恒存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P^\mu)$及定义在其上的以$E$为状态空间以$P$为转移阵以$\{\mu_i\}$为初始分布的可数状态的时齐的马尔可夫链$\{X_n,n\in T\}$。

证 如前构造P链$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,X_n,\theta_n,P^i)$，$(i\in E)$. 若令$P^\mu(A)=\sum_{i\in E}\mu_iP^i(A)(A\in\mathscr{F}^*)$，则$P^\mu$是$\mathscr{F}^*$上的概率测度，而且$\{X_n,n\in\boldsymbol{T}\}$是定义在$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^\mu)$上的以$E$为状态空间以$P$为转移阵以$\{\mu_i\}$为初始分布的可数状态的时齐的马尔可夫链。

附注1.1. 本定理中构造的概率空间$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^\mu)$称为以$P$为转移阵以$\mu=\{\mu_i\}$为初始分布的马尔可夫链概率空间，特别地若$\mu$集中在$i$，（即$\mu_j=\delta_{i,j}$，$j\in E$），则$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^\mu)$就是$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$。若$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,X_n,\theta_n,P^i)$，$(i\in E)$是$P$链，则对任何$i\in E$，$\{X_n;n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$上的以$P$为转移阵的初始分布集中在$i$（即$P^i(X_0=i)=1$）的可数状态的时齐的马尔可夫链。故$P$链实给出一族可数状态的时齐的马尔可夫链。

定义1.2. 如两马尔可夫链具有相同的初始分布及转移阵（自然地状态空间也相同）则称之为等价的。

按此等价关系，可以把马尔可夫链分成一些等价类；两马尔可夫链属于同一个等价类的充要条件是它们具有相同的初始分布与转移阵。仅与初始分布及转移阵有关的性质称为分析性质。如果只研究马尔可夫链的分析性质，则从马尔可夫链概率空间$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^\mu)$出发，特别地从$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$出发即可。

§2. P链的几个特征数

令$\boldsymbol{T}=\{0,1,\cdots\}$，$E$为可数集，$P$为$E$上之转移阵，$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$是如§1所定义的$P$链概率空间，$(i\in E)$。

1. n步转移概率$p_{i,j}^{(n)}$，$(n\geqslant 0)$

令 $p_{i,j}^{(n)}=P^i\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$，$(i,j\in E,\ n\geqslant 0)$，由$P^i$的定义易证 $p_{i,j}^{(n)}$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}\in E} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j},\ (n\geqslant 2),\ p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j},\quad p_{i,j}^{(0)}=\delta_{i,j}.$$

所以$P^n=P^{(n)}\equiv(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)$。（此处$P^n$表转移阵$P$的$n$次幂）。

2. 由i出发时刻n初到j的概率$f_{i,j}^{(n)}$，$(n\geqslant 1)$

令 $f_{i,j}^{(n)}=P^i\left(\begin{bmatrix} 1 & ,\cdots, & n-1, & n \\ \bar{j} & ,\cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix}\right)$，其中 $\bar{j}=E-\{j\}$，$(n>1)$，

$f_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}$。

3. 由i出发经有限步到j的概率$f_{i,j}^*$

令 $f_{i,j}^*=P^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$，显然 $f_{i,j}^*=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}$。

4. 初返时间$T_j(\omega)$

令

$$T_j(\omega)=\begin{cases} 1,\ 若\omega\in\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \\ n,\ 若\omega\in\begin{bmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n-1, & n \\ \bar{j}, & \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix},\ (n>1), \\ \infty,\ 若\omega\in\begin{bmatrix} 1, & 2, & \cdots \\ \bar{j}, & \bar{j}, & \cdots \end{bmatrix}, \end{cases}$$

则T_j是定义在$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P^i)$上的取值于$\{1,\ 2,\ \cdots;\ \infty\}$的随机变量，其概率分布为：

$p^i(T_j=n)=f_{i,j}^{(n)}$，$(n\geqslant 1)$，$p^i(T_j=\infty)=1-f_{i,j}^*$。

5.平均再现时间$m_{i,i}$

令

$$m_{i,i}=\begin{cases}\infty, & 若 f_{i,i}^{*}<1,\\ \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} n, & 若 f_{i,i}^{*}=1,\end{cases}$$

$m_{i,i}$是由i出发初返i的平均时间，注意：即使$f_{i,i}^{*}=1, m_{i,i}$也可能为∞。

6.无穷多次返回j的概率$g_{i,j}$

令 $g_{i,j}=P^{i}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$.

下面我们研究这些特征数之间的关系。

命题2.1. $g_{i,j}=f_{i,j}^{*} g_{j,j}$.

证 $g_{i,j}=P^{i}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} P^{i}\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix},\right.$$

$$\left.\bigcap_{m=k+1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right),$$

用(1.1)即得：

$$g_{i,j}=\sum_{k=1}^{\infty} P^{i}\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix}\right) P^{j}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(K)} g_{j,j}=f_{i,j}^{*} g_{j,j}.$$

命题2.2. $p_{i,j}^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{n} f_{i,j}^{(\nu)} p_{j,j}^{(n-\nu)}$，$(n\geqslant 1)$，若令 $P_{i,j}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} \lambda^{n}$，$F_{i,j}(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} \lambda^{n}$分别为$\{p_{i,j}^{(n)}, n\geqslant 0\}$和$\{f_{i,j}^{(n)},$

$n\geqslant 1\}$的母函数，则还有

$$P_{i,j}(\lambda)=\delta_{i,j}+F_{i,j}(\lambda)P_{j,j}(\lambda),\quad (|\lambda|<1),$$

特别地取$i=j$，则有

$$P_{j,j}(\lambda)=1+F_{j,j}(\lambda)P_{j,j}(\lambda),\quad (|\lambda|<1),$$

或

$$P_{j,j}(\lambda)=\frac{1}{1-F_{j,j}(\lambda)},\quad (|\lambda|<1).$$

证 用(1.1)即得：

$$p_{i,j}^{(n)}=P^{i}\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{n}P^{i}\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & v-1, & v \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{n}P^{i}\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & v-1, & v \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j \end{bmatrix}\right)P^{j}\left(\begin{bmatrix} n-v \\ j \end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{n}f_{i,j}^{(v)}p_{j,j}^{(n-v)}.$$

命题2.3. $f_{i,j}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}=F_{i,j}(1)=\lim_{\lambda\to 1-0}F_{i,j}(\lambda)$;

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}=\lim_{\lambda\to 1-0}P_{i,j}(\lambda).$$

证 第一式甚为显然。至于第二式，由于$\lim_{\lambda\to 1-0}P_{i,j}(\lambda)\geqslant$
$\lim_{\lambda\to 1-0}\sum_{n=0}^{N}p_{i,j}^{(n)}\lambda^{n}=\sum_{n=0}^{N}p_{i,j}^{(n)}$，$(N\geqslant 0)$，故$\lim_{\lambda\to 1-0}P_{i,j}(\lambda)\geqslant$
$\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}$。而大于号不可能成立，从而$\lim_{\lambda\to 1-0}P_{i,j}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}$.

命题2.4. $\sum_{n=0}^{\infty}p_{j,j}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{j,j}^{*}}$，（约定$\frac{1}{0}=\infty$）；

$$m_{i,j}=\begin{cases}\infty, & \text{若} f^*_{j,j}<1, \\ F'_{j,j}(1), & \text{若} f^*_{j,j}=1. \end{cases}$$

证 由命题2.2、2.3立得命题2.4。

命题2.5. 若$g_{i,i}=1$，$f^*_{i,j}>0$，则$g_{i,j}=1$。

证
$$g_{i,j}=P^i\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right)$$

$$\geqslant P^i\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix},\ \bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}\right)$$

$$=P^i\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}\right)-P^i\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\right.$$

$$\left.\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right)$$

$$=g_{i,i}-\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^i\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right).$$

但是，当$s>m>0$时，用(1.1)有：

$$P^i\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right)$$

$$\leqslant\sum_{t=s}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix} s, & \cdots, & t-1, & t \\ \bar{i}, & \cdots, & \bar{i}, & i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right)$$

$$\leqslant\sum_{t=s}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix} m, & \cdots, & s-1, & s, & \cdots, & t-1, & t \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & \bar{i}, & \cdots, & \bar{i}, & i \end{bmatrix},\right.$$

$$\left.\bigcap_{n=t-1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{t=s}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix} m, & \cdots, & s-1, & s, & \cdots, & t-1, & t \\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & \bar{i}, & \cdots, & \bar{i}, & i \end{bmatrix}\right)(1-f^*_{i,j})$$

$$\leqslant P^i\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{t-1}\begin{bmatrix} n \\ \bar{j} \end{bmatrix}\right)(1-f^*_{i,j}).$$

在上述不等式中先令$s\to\infty$次令$m\to\infty$即得：

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t\\ i\end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n\\ \bar{j}\end{bmatrix}\right)$$

$$\leqslant(1-f^{*}_{i,j})\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t\\ i\end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n\\ \bar{j}\end{bmatrix}\right).$$

由$(1-f^{*}_{i,j})<1$即得$g_{i,j}=g_{i,i}=1$。

引理2.1. 设$\{a_n,\ n\geqslant0\}$是非负实数序列，且非全零，再设实数序列$\{b_n,\ n\geqslant0\}$有极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，($b$可以是$\pm\infty$)，若

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\Big/\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu\right)=0$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu}=\lim_{n\to+\infty}b_n. \tag{2.1}$$

证 由假设总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=n-N+1}^{n}a_\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu}=0,\ (一切N>0). \tag{2.2}$$

(1) 先设b是有限数，则对任给$\varepsilon>0$，总存在正整数$N=N(\varepsilon)$，及B，使$|b_n-b|<\varepsilon$ $(n\geqslant N)$，$|b_n-b|\leqslant B$ (一切n)，所以

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu(b_{n-\nu}-b)\right|\leqslant\left(\sum_{\nu=0}^{n-N}a_\nu\right)\varepsilon+\left(\sum_{\nu=n-N+1}^{n}a_\nu\right)B,\ (n\geqslant N),$$ 把

上式除以$\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu$再令$n\to\infty$并用(2.2)即得

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu}-b\right|\leqslant\varepsilon.$$

由ε之任意性立得(2.1)。

(2) 再设b为无穷大，不失普遍性可令 $b=+\infty$， 于是任给$M>0$，存在$N=N(M)$，使$b_n\geqslant M$(当$n\geqslant N$)，所以

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\geqslant\Big(\sum_{\nu=0}^{n-N} a_\nu\Big)M+\Big(\sum_{\nu=n-N+1}^{n} a_\nu\Big)\Big(\min_{0\leqslant k\leqslant N} b_k\Big).$$ 把

上式除以$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$再令$n\to\infty$并用(2.2)即得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu}\geqslant M.$$

由M的任意性立得(2.1)，引理证毕。

附注2.1. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n<\infty$或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\infty$，$\{a_n\}$有界，则$\{a_n\}$必满足引理2.1中的条件。

命题2.6. $\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}\Big/\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}\Big)=f_{ij}^{*}$.

证 由命题2.2有

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)}p_{jj}^{(n-\nu)}=\sum_{\nu=0}^{N-1} p_{jj}^{(\nu)}\sum_{n=\nu+1}^{N} f_{ij}^{(n-\nu)}$$

$=\sum_{\nu=0}^{N-1} p_{jj}^{(\nu)}\sum_{n=1}^{N-\nu} f_{ij}^{(n)}$. 取$a_\nu=p_{jj}^{(\nu)}$，($\nu\geqslant0$)，$b_0=0$，$b_\nu=$

$\sum_{n=1}^{v} f_{i,j}^{(n)}$，$(v\geqslant 1)$，并利用引理2.1立得命题2.6。

命题2.7. $g_{i,j}=f_{i,j}^{*}\lim_{m\to\infty}(f_{j,j}^{*})^{m}$.从而$g_{i,j}$非0即为$f_{i,j}^{*}$，$g_{i,i}$非0即1，且"$g_{i,i}=1\Longleftrightarrow f_{i,i}^{*}=1$"。

证 令 $g_{i,j}(m)=P^{i}\Big(\bigcup_{1\leqslant n_1<\cdots<n_m}\bigcap_{s=1}^{m}\begin{bmatrix}n_s\\ j\end{bmatrix}\Big)$，$(m\geqslant 1)$，

则由(1.1)有

$$g_{i,j}(m+1)=\sum_{k=1}^{\infty}P^{i}\Big(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k\\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j\end{bmatrix},$$

$$\bigcup_{k+1\leqslant n_1<\cdots<n_m}\bigcap_{s=1}^{m}\begin{bmatrix}n_s\\ j\end{bmatrix}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{i,j}^{(k)}g_{j,j}(m)$$

$=f_{i,j}^{*}g_{j,j}(m)$。

若注意$g_{i,j}(1)=f_{i,j}^{*}$，$g_{i,j}=\lim_{m\to\infty}g_{i,j}(m)$，

则对m作归纳法可证：$g_{i,j}(m+1)=f_{i,j}^{*}(f_{j,j}^{*})^{m}$，所以

$$g_{i,j}=\lim_{m\to\infty}g_{i,j}(m+1)=\lim_{m\to\infty}f_{i,j}(f_{j,j}^{*})^{m}.$$

命题2.8. $f_{i,j}^{*}=p_{i,j}+\sum_{k\neq j}p_{i,k}f_{k,j}^{*}$，$(i,\ j\in E)$。

证 用(1.1)即得

$$f_{i,j}^{*}=P^{i}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}\Big)=p_{i,j}+\sum_{n=2}^{\infty}P^{i}\Big(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & n-1, & n\\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j\end{bmatrix}\Big)$$

$$=p_{i,j}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}P^{i}\Big(\begin{bmatrix}1\\ k\end{bmatrix}\Big)P^{k}\Big(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & n-2, & n-1\\ \bar{j}, & \cdots, & \bar{j}, & j\end{bmatrix}\Big)$$

$$=p_{i,j}+\sum_{k\neq j}p_{i,k}f_{k,j}^{*}.$$

§ 3. 状态的分类及判别准则

令 $T=\{0, 1, 2, \cdots\}$，E 为可数集，$P=(p_{i,j}, i, j\in E)$ 为E上的转移阵。称E为P（或者为P链）的状态空间，称E中任一点i为P 之状态。在这一节中将要对E进行分类。由于分类的依据仅仅是P，所以概率空间和P链可以隐而不现，至多只参考§1中构造的P链的概率空间$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$就够了。

在这一节中，T、E、P、$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$ 总是给定的，并沿用§2的符号。

定义3.1. 称状态 i 可达 j（记之为$i \rightsquigarrow j$），如果存在正整数m，使$p_{i,j}^{(m)}>0$。若$i\rightsquigarrow j$，$j\rightsquigarrow i$，则称i，j互通，记之为 $i \leftrightsquigarrow j$。如果$f_{j,j}^*<1$，则称 j 是滑过状态，全体滑过状态用N表之。若 $f_{j,j}^*=1$，则称 j 是常返状态，全体常返状态用R表之。若常返状态 j 满足$m_{j,j}<\infty$，则称j是正状态，反之称j 为零状态，全体正状态用R^+表之，全体零状态用R^0表之。于是 $E=N\cup R=N\cup R^0\cup R^+$。

命题3.1. $i\rightsquigarrow j\Longleftrightarrow f_{i,j}^*>0$；$i\leftrightsquigarrow j\Longleftrightarrow f_{i,j}^* f_{j,i}^*>0$

证 由 $\sup\limits_n p_{i,j}^{(n)}\leqslant f_{i,j}^*\leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}$ 立得命题。

命题3.2. $j\in N\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)}<\infty$。

证 由命题2.4. 立得命题3.2.

命题3.3. 若$f_{i,i}^*=1$，$f_{i,j}^*>0$，$(i\neq j)$，则

(1) 存在正整数m及正数c，使

$$p_{j,j}^{(m+n)}\geqslant cp_{i,i}^{(n)},\quad (n\geqslant 0);$$

(2) $f_{i,i}^*=f_{i,j}^*=f_{j,i}^*=f_{j,j}^*=1$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,i}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}^{(n)}=\infty$。

证 (1) 因$f^*_{i,j}>0$，故存在$M\geqslant 1$使$\alpha=p^{(M)}_{i,j}>0$。用(1.1)及命题2.7有

$$\begin{aligned}
\alpha &= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}\right) \\
&= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix},\ \bigcup_{n>M}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\right)+P^i\left(\begin{bmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & \bar{i}, & \bar{i}, & \cdots \end{bmatrix}\right) \\
&= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}\right)P^j\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\right)+P^i\left(\begin{bmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & \bar{i}, & \bar{i}, & \cdots \end{bmatrix}\right) \\
&\leqslant \alpha f^*_{j,i}+P^i\left(\bigcap_{n=M+1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{i} \end{bmatrix}\right) \\
&\leqslant \alpha f^*_{j,i}+P^i\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ \bar{i} \end{bmatrix}\right)=\alpha f^*_{j,i}+(1-g_{i,i})=\alpha f^*_{j,i}.
\end{aligned}$$

由$\alpha>0$，$0\leqslant f^*_{j,i}\leqslant 1$，得$f^*_{j,i}=1$。所以存在$M'$使$\beta=p^{(M')}_{j,i}>0$。于是$p^{(M'+n+M)}_{j,j}\geqslant p^{(M')}_{j,i}p^{(n)}_{i,i}p^{(M)}_{i,j}=\alpha\beta p^{(n)}_{i,i}$。故取$m=M+M'$，$c=\alpha\beta$即为所求。(1)得证。

(2). 因为$f^*_{i,i}=1$，所以$i\in R$，由命题3.2知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{i,i}=\infty$，再用(1)得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{j,j}=\infty$，从而$j\in R$，故$f^*_{j,j}=1$。总之我们由$f^*_{i,i}=1$，$f^*_{i,j}>0$推出了$f^*_{j,i}=1$，$f^*_{j,j}=1$。当然由$f^*_{j,j}=1$，$f^*_{j,i}=1$亦可推出$f^*_{i,j}=1$，$f^*_{i,i}=1$。(2)证毕。由命题3.2及2.6得(3)。

定义3.2. 设$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$是E上之矩阵，$E_1\subset E$，称$Q_1=(q_{i,j},\ i,\ j\in E_1)$为$Q$ on E_1。(对于行(列)向量，亦有类似定义。)

定理3.1. $E=N\cup R=N\cup(R^0\cup R^+)$，$P$有如下形式：

	N	R^0	R^+
N	Q	Q_0	Q_+
R^0	O	P_0	O
R^+	O	O	P_+

即是$P\,\mathrm{on}\,R^0=P_0$，$P\,\mathrm{on}\,R^+=P_+$，$P\,\mathrm{on}\,N=Q$，$Q_0=(p_{i,j},\ i\in N,\ j\in R^0)$，$Q_+=(p_{i,j},\ i\in N,\ j\in R^+)$，$p_{i,j}=0,(i\in R^0, j\bar{\in}R^0)$，$p_{i,j}=0$，$(i\in R^+, j\bar{\in}R^+)$。$P_0$，$P_+$分别为定义在$R^0$，$R^+$上之转移阵。

证 (1) 若 $i\in R$，即$f^*_{i,i}=1$。若$f^*_{i,j}>0$，则由命题3.3有$f^*_{j,j}=1$，即$j\in R$。这就证明了：

$i\in R$，$j\in N\Rightarrow f^*_{i,j}=0\Rightarrow p_{i,j}=0$。

(2) 若$i\in R^+$，（从而$f^*_{i,i}=1$，$m_{i,i}<\infty$），$f^*_{i,j}>0$，则由命题3.3知：$f^*_{j,j}=f^*_{j,i}=f^*_{i,j}=1$，且存在正整数$m$及正数$c$，使

$$p^{(n+m)}_{j,j}\geqslant c\,p^{(n)}_{i,i} \qquad (\text{一切}n\geqslant 0)。$$

再用命题2.2及2.4有

$$\frac{1}{m_{j,j}}=(F'_{j,j}(1))^{-1}=\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)P_{j,j}(\lambda)$$

$$=\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{j,j}\lambda^n$$

$$\geqslant\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\,c\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{i,i}\lambda^{n+m}=\frac{c}{m_{i,i}}>0,$$

所以$j\in R^+$。这就证明了：

$i\in R^+, j\bar{\in}R^+\Rightarrow f^*_{i,j}=0\Rightarrow p_{i,j}=0$。

(3) 若$i\in R^0$，$f^*_{i,j}>0$，则由命题 3.3(1)有$f^*_{j,i}=1$。谬设$j\in R^+$，则由(2)知$i\in R^+$，矛盾，所以这就证明了：

$i\in R^0$，$j\in R^+\Rightarrow f^*_{i,j}=0\Rightarrow p_{i,j}=0$。

总上三步，定理3.1得证。

下面我们对R^0（R^+亦类似）再分类。如定义3.1，对于任何i，$j\in R^0$，"$i\leftrightarrow j\Longleftrightarrow f_{i,j}^* f_{j,i}^*>0$"。显然关系"$\leftrightarrow$"定义在$R^0$上是一等价关系，即是具有(i)自返性($i\in R^0\Rightarrow i\leftrightarrow i$)；(ii)对称性($i$，$j\in R^0, i\leftrightarrow j\Rightarrow j\leftrightarrow i$)；(iii)传递性($i$，$j, k\in R^0$，$i\leftrightarrow j$，$j\leftrightarrow k\Rightarrow i\leftrightarrow k$)。所以按关系$\leftrightarrow$可以把$R^0$分成一些互不相交的等价类：

$$R^0=R_1^0+R_2^0+\cdots.$$

由命题3.3得知若i，$j\in R_n^0$，则$f_{i,j}^*=1$，若$i\in R_m^0, j\in R_n^0, m\neq n$，则$f_{i,j}^*=0$。由此，我们得到：

定理3.2. $E=N\cup R=N\cup(R^0\cup R^+)$

$$=N\cup(\bigcup_m R_m^0)\cup(\bigcup_n R_n^+)$$，P具有下述形状：

	N	R_1^0	R_2^0	$\cdots$	R_1^+	R_2^+	$\cdots$
N	Q	$Q_{0,1}$	$Q_{0,2}$	$\cdots$	$Q_{+,1}$	$Q_{+,2}$	$\cdots$
R_1^0	O	$P_{0,1}$	O	$\cdots$	O	O	$\cdots$
R_2^0	O	O	$P_{0,2}$	$\cdots$	O	O	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
R_1^+	O	O	O	$\cdots$	$P_{+,1}$	O	$\cdots$
R_2^+	O	O	O	$\cdots$	O	$P_{+,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$		$\ddots$

即是$P on R_m^0=P_{0,m}$，$P on R_n^+=P_{+,n}$，$P on N=Q, Q_{0,m}=(p_{i,j}, i\in N,$ $j\in R_m^0)$，$Q_{+n}=(p_{i,j}$，$i\in N$，$j\in R_n^+)$，$p_{i,j}=0(i\in R_m^0$，$j\overline{\in} R_m^0)$，$p_{i,j}=0$ $(i\in R_n^+$，$j\overline{\in} R_n^+)$，$P_{0,m}$，$P_{+,n}$分别为R_m^0、R_n^+上之转移阵。每一个$R_m^0(R_n^+)$都称为一个"零类"（正类）。零类和正类统称为常返类。N中每一状态自成一个类。

定义3.3. 称E的非空子集J是封闭的，如果$i\in J$，$j\overline{\in} J\Rightarrow$ $p_{i,j}=0$，（即$i\in J\Rightarrow\sum\limits_{j\in J}p_{i,j}=1$）.

定义3.4. 对任何 $J\subset E$, 记 $f_{i,J}^{(n)}=p^i\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & n-1, & n\\ \bar{J}, & \cdots, & \bar{J}, & J\end{bmatrix}\right)$,

$f_{i,J}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,J}^{(n)}=p^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\ J\end{bmatrix}\right)$, $p_{i,J}^{(n)}=p^i\left(\begin{bmatrix}n\\ J\end{bmatrix}\right)=\sum_{j\in J}p_{i,j}^{(n)}$,

$\hat{J}=\{i\,|\,i\in E,\ f_{i,J}^{*}=0\}$.

命题3.4. 设 J 和 $\hat{J}$ 都是 E 的非空子集, 则 (i) $\hat{J}$ 封闭; (ii) $\hat{J}\cap\bar{J}$ 亦封闭.

证 (i) 设 $i\in\hat{J}$, $j\overline{\in}\hat{J}$, 则 $p_{i,j}f_{j,J}^{*}\leqslant f_{i,J}^{*}=0$, $f_{j,J}^{*}>0$, 所以 $p_{i,j}=0$, 此即 $\hat{J}$ 封闭.

(ii) 取 $i\in\hat{J}$. (a) 若 $j\overline{\in}\hat{J}$, 则由(i) $p_{i,j}=0$。(b)若 $j\in J$, 则 $p_{i,j}\leqslant f_{i,J}^{*}=0$。总(a)、(b)可知: $\sum_{j\in\hat{J}\cap\bar{J}}p_{i,j}=1$。故 $\hat{J}\cap\bar{J}$ 封闭.

命题3.5. 对任何 $i\in E$, $\{j\,|\,j\in E,\ f_{i,j}^{*}>0\}$ 封闭。

证 设 $k\in\{j\,|\,j\in E,\ f_{i,j}^{*}>0\}$, $l\overline{\in}\{j\,|\,j\in E,\ f_{i,j}^{*}>0\}$, 则 $f_{i,l}^{*}=0$; $f_{i,k}^{*}>0$, 从而 $f_{k,l}^{*}=0$, 故 $p_{k,l}=0$。

定义3.5. 称 E 是可约的(或 P 是可约的), 若 E 有封闭的真子集 J, 反之称 E 是不可约的。

命题3.6. E 不可约的充要条件是 $f_{i,j}^{*}>0$, $(i,\ j\in E)$.

证 充分性显然, 必要性也只须注意: 若 $f_{i_0,j_0}^{*}=0$, 则 $\{j\,|\,j\in E,\ f_{i_0,j}^{*}>0\}$ 是 E 的封闭真子集。

系1. 若存在 $i_0\in E$, 使 $f_{i_0,j}^{*}f_{j,i_0}^{*}>0$, $(j\in E)$, 则 E 是不可约的。

定义3.6. 设 $i\in E$, $i\rightsquigarrow i$, 称 $\{n\,|\,p_{i,i}^{(n)}>0,\ n\geqslant1\}$ 的最大公因子 $G.C.D.\{n\,|\,p_{i,i}^{(n)}>0,\ n\geqslant1\}$ 为 i 之周期, 记之为 d_i。

命题3.7. 若 $f_{i,j}^{*}>0$, $f_{j,i}^{*}>0$, 则 $d_i=d_j$。

证 由假设有 $i\rightsquigarrow i$, $j\rightsquigarrow j$, $i\rightsquigarrow j$, 所以 d_i, d_j 均有定义

且存在正整数 s 和 t 使 $p_{i,j}^{(s)}p_{j,i}^{(t)}>0$。于是：$p_{j,j}^{(n)}>0\Rightarrow p_{i,i}^{(s+n+t)}\geqslant p_{i,j}^{(s)}p_{j,j}^{(n)}p_{j,i}^{(t)}>0\Rightarrow d_i$能整除$(s+n+t)$。但由 $p_{j,j}^{(n)}>0$ 可推出 $p_{j,j}^{(2n)}>0$，故又有$p_{j,j}^{(2n)}>0\Rightarrow d_i$能整除$(s+2n+t)$。总之有：

$$p_{j,j}^{(n)}>0\Rightarrow d_i\text{能整除}n。$$

所以d_i能整除d_j，由d_i，d_j地位之对称性得$d_i=d_j$。

命题说明：“$i\in N$，$f_{i,i}^{*}>0\Rightarrow d_i$有定义”；“$i$，$j\in R_n^+(R_m^0)\Rightarrow d_i$，$d_j$有定义且相等”。

下面再把每一个R_m^0（或R_n^+）分成循环子类。

由命题3.7知：任取$i\in R_m^0$,d_i有定义，且不依赖$i\in R_m^0$。故可定义 d_i为类 R_m^0之周期，用 $d^0(m)$表之，以说明它仅与 R_m^0有关而与 $i\in R_m^0$无关。若$d^0(m)=1$，则说R_m^0无周期。

命题3.8. 设$f_{i,j}^{*}f_{j,i}^{*}>0$。则

(i) $p_{i,j}^{(m)}p_{j,i}^{(n)}>0\Rightarrow d_i|(m+n)$ ($d|k$表d能整除k)；

(ii) $p_{i,j}^{(n_1)}p_{i,j}^{(n_2)}>0\Rightarrow d_i|(n_1-n_2)$；

(iii) 存在$M(i)$，使$p_{i,i}^{(md_i)}>0$　　$(m\geqslant M(i))$；

(iv) 存在r_j，使$p_{i,j}^{(n)}>0\Rightarrow n\equiv r_j(\text{mod}\,d_i)$；

(v) 存在$K(i)$，使$n\geqslant K(i)\Rightarrow p_{i,j}^{(nd_i+r_j)}>0$。

证 (i) $p_{i,j}^{(m)}p_{j,i}^{(n)}>0\Rightarrow p_{i,i}^{(m+n)}>0\Rightarrow d_i|(m+n)$。

(ii) 由$f_{j,i}^{*}>0$知：存在 $\nu\geqslant1$使$p_{j,i}^{(\nu)}>0$。所以由 $p_{i,j}^{(n_1)}p_{i,j}^{(n_2)}>0$得$p_{i,j}^{(n_1)}p_{j,i}^{(\nu)}>0$，$p_{i,j}^{(n_2)}p_{j,i}^{(\nu)}>0$。用(i)得$d_i|(n_1+\nu)$，$d_i|(n_2+\nu)$，从而$d_i|(n_1-n_2)$。

(iii) 由d_i的定义知：存在n_1，…，n_k，使

$$\prod_{s=1}^{k}p_{i,i}^{(n_s)}>0,\ d_i=G.C.D.\{n_1,\cdots,n_k\}.$$

用数论中一条初等定理得知：存在$M(i)$，当$m\geqslant M(i)$时有：

$$md_i=\sum_{s=1}^{k}c_sn_s，（c_s\text{是正整数}）。所以$$

$$p_{i,i}^{(md_i)}\geqslant\prod_{s=1}^{k}(p_{i,i}^{(n_s)})^{c_s}>0,\ (m\geqslant M(i)).$$

(iv) 由(ii) 立得(iv)。

(v) 由$f_{i,i}>0$及(iv)得知存在$m'd_i+r_i$，使 $p_{i,j}^{(m'd_i+r_j)}>0$。由(iii)，取$K(i)=m'+M(i)$即为所求。

定义3.7. 设E是不可约的，d为其周期(由命题3.7，E中任一状态i之周期d_i不依赖i，故可以d_i为E(或者P)之周期)，若$d>1$，令$H_{i,j}=G.C.D.\{n|p_{i,j}^{(n)}>0, n\geq1\}$，若$d|H_{i,j}$，则称$i$，$j$具有关系$\approx$，记作$i\approx j$。若$d=1$，则称$E$(或者$P$)是无周期。

命题3.9. 定义3.7中确定的关系$\approx$是一个等价关系。

证 (1) 自返性，由$d=H_{i,i}$即得$i\approx i$。

(2) 对称性，设$i\approx j$，任取m，使$p_{i,j}^{(m)}>0$，于是$d|m$。又由命题3.8(i)知：若$p_{j,i}^{(n)}>0$，则$d|(m+n)$，所以$d|n$，从而$d|H_{j,i}$，即$j\approx i$。

(3) 传递性，设$i\approx j$，$j\approx k$，任取s、t，使$p_{i,j}^{(s)}>0$，$p_{j,k}^{(t)}>0$。于是$d|s$，$d|t$，而由命题3.8(ii)知$p_{i,k}^{(n)}>0$ ($\because p_{i,k}^{(s+t)}>0$) $\Rightarrow n=s+t(\text{mod } d)$。
再注意$d|(s+t)$得：$p_{i,k}^{(n)}>0\Rightarrow n=0(\text{mod } d)$。此即$i\approx k$。

命题3.10. 设E不可约，$i\approx j$，则$d=H_{i,j}$。

证 设$H_{i,j}=\delta$，任取t，使$p_{j,i}^{(t)}>0$，按命题3.8(iii)可取m_0使$p_{i,j}^{(m_0d)}p_{i,j}^{((m_0+1)d)}>0$，于是
$p_{i,j}^{(t+m_0d)}p_{i,j}^{(t+(m_0+1)d)}>0$，所以$\delta|(t+m_0d)$，$\delta|(t+(m_0+1)d)$，从而$\delta|d$，而$i\approx j\Rightarrow d|\delta$，所以$d=\delta$。

命题3.11. 设E不可约，则"$p_{i,j_1}^{(m_1)}$ $p_{i,j_2}^{(m_2)}>0$，$m_1=m_2(\text{mod } d)$ $\Longleftrightarrow j_1\approx j_2$"。

证 设$p_{i,j_1}^{(m_1)}$ $p_{i,j_2}^{(m_2)}>0$，$m_1=m_2(\text{mod } d)$，则由命题 3.8(ii)知：$p_{j_1,j_2}^{(n)}>0\Rightarrow p_{i,j_2}^{(n+m_1)}>0\Rightarrow m_1+n=m_2(\text{mod } d)\Rightarrow n=0(\text{mod } d)$，故$j_1\approx j_2$。

命题3.12. 设E不可约，周期为d，则关系$\approx$恰巧把E分为d个不交的循环类：$E=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_d$，$i$，$j$同属于一个循环类$C_r$的充要条件是$i\approx j$，而且"$i\in C_r$，$j\overline{\in} C_{r+1}\Rightarrow p_{i,j}=0$"，(从而$p_{i,j}^{(t)}>$

0，$i\in C_r$，$j\in C_q\Rightarrow q-r=s(\bmod d)$)。

证 不妨设$d>1$，由于$\approx$是一个等价关系，所以可以把E分成若干个不交的循环类，使i，j同属于一个循环类的充要条件是$i\approx j$，故为证命题，只须证明两点：(1) 循环类的个数恰为d；(2) $i\in C_r$，$j\overline{\in}C_{r+1}\Rightarrow p_{i,j}=0$，(注：记 $C_m=C_r$ 当$1\leqslant r\leqslant d, m=r$ $(\bmod d)$)

(1) 先证循环类之个数不超过d，反之，必有状态i_0，i_1，…，i_d，使i_s与i_t无关系$\approx$，($s\neq t$，$0\leqslant s$，$t\leqslant d$)，取m_1，…，m_d使$\prod\limits_{h=1}^{d}p_{i_0,i_h}^{(m_h)}>0$，由命题3.11有$m_s\neq m_t$ $(\bmod d)$，($1\leqslant s$，$t\leqslant d$，$s\neq t$)，由命题3.8(iii)再取m_0，使$p_{i_0,i_0}^{(m_0d)}>0$。用命题3.11又有$m_s\neq m_0d(\bmod d)$，($1\leqslant s\leqslant d$)，而d个正整数$\{m_s, 1\leqslant s\leqslant d\}$每一个都不能被$d$整数，又互不同余，是不可能的，这就证明了循环类之个数不超过d。

于是可令$E=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_d$，再证每个$C_r$非空，由命题3.10知：$i$与$j$属于同一类$\Rightarrow p_{i,j}=0$，今在各个类中取一非空者，认为这是$C_1$，任取$i_1\in C_1$，由$1=\sum\limits_{j\in E}p_{i_1,j}=\sum\limits_{j\in\bigcup\limits_{h=2}^{d}C_h}p_{i_1,j}$得知存在$i_2\in\bigcup\limits_{h=2}^{d}C_h$，使$p_{i_1,i_2}>0$，就认为含$i_2$者为$C_2$，若$d=2$，则终止，设$d>2$，由命题3.10知$p_{i_1,j}^{(2)}=0$，($j\in C_1$)，又$p_{i_1,i_2}>0$，$p_{i_1,j}^{(2)}\geqslant p_{i_1,i_2}p_{i_2,j}$，所以$p_{i_2,j}=0(j\in C_1)$，而$p_{i_2,j}=0$，($j\in C_2$)，故

$1=\sum\limits_{j\in E}p_{i_2,j}=\sum\limits_{j\in\bigcup\limits_{h=3}^{d}C_h}p_{i_2,j}$ 因此存在$i_3\in\bigcup\limits_{h=3}^{d}C_h$，使$p_{i_2,i_3}>0$，

就认为含i_3者为C_3，若$d=3$则终止，若$d>3$，再仿上作下去，d次以后得到d个状态i_1，…，i_d，使$i_k\in C_k$，($1\leqslant k\leqslant d$)，且

$\prod_{k=1}^{d-1} p_{i_k, i_{k+1}} > 0$。(1)证毕。

(2) 再证 $i\in C_r$, $j\in C_{r+1} \Rightarrow p_{i,j}=0$。

设 $i\in C_\alpha$, $j\in C_\beta$, $p_{i,j}>0$, 往证 $\beta=\alpha+1 \pmod d$, 事实上，不妨令 $\beta\geqslant\alpha$，因 $i\approx i_\alpha$，$j\approx i_\beta$（i_k 是(1)中找出的，故有 $p_{i_k,i_{k+1}}>0$），所以存在 m 及 m' 使 $p^{(md)}_{i,i_\alpha}>0$, $p^{(m'd)}_{i_\beta,j}>0$, 因此, $p^{(md+\beta-\alpha+m'd)}_{i,j}\geqslant$ $p^{(md)}_{i,i_\alpha} p_{i_\alpha,i_{\alpha+1}}\cdots p_{i_{\beta-1},i_\beta} p^{(m'd)}_{i_\beta,j}>0$, 但又有 $p_{i,j}>0$, 所以由命题3.8(ii)有 $md+\beta-\alpha+m'd=1 \pmod d$, 所以 $\beta=\alpha+1 \pmod d$。

定理3.3. 设 E 不可约，周期为 d，则 E 可分成 d 个互不相交的非空的循环类： $E=\bigcup_{k=1}^{d} C_k$，这时 P 有如下形式（$d>1$ 时）：

	C_1	C_2	$\cdots$	C_{d-1}	C_d
C_1	O	$\hat{P}_1$	$\cdots$	O	O
C_2	O	O	$\hat{P}_2\cdots$	O	O
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
C_{d-1}	O	O	$\cdots$	O	$\hat{P}_{d-1}$
C_d	$\hat{P}_d$	O	$\cdots$	O	O

$P^{(d)}=\tilde{P}=(\tilde{p}_{i,j},\ i,\ j\in E)$ 有如下形式

	C_1	C_2	C_3	$\cdots$	C_d
C_1	$\tilde{P}_1$	O	O	$\cdots$	O
C_2	O	$\tilde{P}_2$	O	$\cdots$	O
C_3	O	O	$\tilde{P}_3$	$\cdots$	O
$\vdots$					
C_d	O	O	O	$\cdots$	$\tilde{P}_d$

即是$\tilde{P}onC_a=\tilde{P}_a$是转移阵，$\tilde{p}_{i,j}=0$，$(i\in C_a,\ j\overline{\in}C_a)$，$a=1,2,\cdots d$，此外$\tilde{P}_a$是不可约的，无周期的。

证 只证$\tilde{P}onC_a=\tilde{P}_a$是不可约无周期的转移阵，(其它论断前面诸命题已证)。

任取$i\in C_a$，若$\tilde{p}_{i,j}>0$，即$p_{i,j}^{(d)}>0$，则必有$j_1,\cdots,j_{d-1}$，使$p_{i,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{d-1},j}>0$，所以由命题3.12有$j_1\in C_{a+1},\cdots,j_{d-1}\in C_{a+d-1}$，所以$j\in C_{a+d}=C_a$，可见"$i\in C_a,\ j\overline{\in}C_a\Rightarrow\tilde{p}_{i,j}=0$"，此即$\tilde{P}_a$是转移阵。

任取$i,j\in C_a$，由E不可约知，存在m，使$p_{i,j}^{(m)}>0$，因i,j同属于一个循环类，故必有$m=rd$，所以$\tilde{p}_{i,j}^{(r)}=p_{i,j}^{(rd)}=p_{i,j}^{(m)}>0$，所以$\tilde{P}onC_a$是不可约的。

最后证明$\tilde{P}onC_2$是无周期的。任取$i\in C_a$，由命题3.8(iii)必存在m_0，使$p_{i,i}^{(m_0d)}>0$，$p_{i,i}^{((m_0+1)d)}>0$，此即$\tilde{p}_{i,i}^{(m_0)}>0$，$\tilde{p}_{i,i}^{(m_0+1)}>0$，所以$G.C.D.\{m;\ \tilde{p}_{i,i}^{(m)}>0\}=1$。至此，定理证毕。

由定理3.2，对任意E，可分解成$E=N\cup(\bigcup_m R_m^0)\cup(\bigcup_n R_n^+)$，由于$PonR_m^0=P_{0,m}$是不可约的($PonR_n^+=P_{+,n}$亦然)，若令$R_m^0(R_n^+)$之周期为$d^0(m)(d^+(n))$，则由定理3.3，$R_m^0(R_n^+)$恰可分为$d^0(m)(d^+(m))$个循环类$R_m^0=\bigcup_{t=1}^{d^0(m)}R_m^0(t)\left(R_n^+=\bigcup_{t=1}^{d^+(n)}R_n^+(t)\right)$，$P_{0,m}^{d^0(m)}$，$P_{+,n}^{d^+(n)}$是不可约无周期的转移阵，且"$p_{i,j}^{(r)}>0$，$i\in R_m^0(s)$，$j\in R_m^0(t)\Rightarrow t-s=r(\bmod d^0(m))$"。

定理3.4. 对任意E，有

(1) $i\in R\Longleftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,i}^{(n)}=\infty\Longleftrightarrow f_{i,i}^*=1\Longleftrightarrow g_{i,i}=1$，

$i\in R^+\Longleftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,i}^{(n)}=\infty$，$F'_{i,i}(1)<\infty\Longleftrightarrow f_{i,i}^*=1$，

$F'_{i,i}(1)<\infty\Longleftrightarrow g_{i,i}=1$，$F'_{i,i}(1)<\infty$；

(2) $i\in R$, $i\leftrightarrow j$, $\Rightarrow f^*_{i,i}=f^*_{j,j}=f^*_{i,j}=f^*_{j,i}=1$, $g_{i,i}=g_{j,j}=g_{i,j}=g_{j,i}=1$。

证 由命题2.4、2.7、3.3立得定理3.4。

在本书中，矩阵(特别地，向量)的大小的比较、极限，…等，都是逐元意义下的。例如$Q^{(n)}=(q^{(n)}_{i,j},\ i,\ j\in E)$，则$Q^{(n)}\geqslant Q^{(m)}$定义为$q^{(n)}_{i,j}\geqslant q^{(m)}_{i,j}$，$(i,\ j\in E)$，$\lim\limits_{n\to\infty}Q^{(n)}$定义为$(\lim\limits_{n\to\infty}q^{(n)}_{i,j},i,j\in E)$。零矩阵(向量)亦用0表之。对矩阵(向量)常分块表示，例如$E=E_1\cup E_2, E_1\cap E_2=\varnothing, Q=(q_{i,j},i,j\in E)$，则

$$Q=\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}E_1 & E_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}\end{array}$$

表示$(q_{i,j},\ i\in E_s,\ j\in E_t)=Q_{st}$，$(s,\ t=1,\ 2)$。

§4. 遍历性定理及状态的区分

在这一节中，恒设E是可数集，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是E上的转移阵，$P^n=P^{(n)}=(p^{(n)}_{i,j},\ i,\ j\in E)$是$n$步转移阵，$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,\ P^i)$，$(i\in E)$是如§1所定义的$P$链的概率空间，本节研究的主要内容是：$\lim\limits_{n\to\infty}p^{(n)}_{i,j}$存在的充要条件是什么？当此极限存在时，如何求？有何性质？及状态的区分……等等。

引理4.1. 设$\{f_n,\ n\geqslant1\}$、$\{p_n,n\geqslant0\}$是两个非负实数序列，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\leqslant1$，$p_n\leqslant1$，$p_0=1$，且

$$p_n=\sum_{v=1}^{n}f_v p_{n-v},\quad(n\geqslant1),\tag{4.1}$$

则$G.\ C.\ D.\{n|f_n>0,\ n\geqslant1\}=G.\ C.\ D.\{n|p_n>0,n\geqslant1\}$。

证 令$s=\min\{n|f_n>0,\ n\geqslant1\}$，则$s=\min\{n|p_n>0,n\geqslant1\}$。再令$d^f_N=G.C.\ D.\ \{n|f_n>0,s\leqslant n\leqslant N\}$，$d^p_N=G.C.D.\ \{n|p_n>0,$

$s \leqslant n \leqslant N\}(N \geqslant s)$。显然$d'_s = s = d''_s$。设$d'_N = d''_N$,往证：$d'_{N+1} = d''_{N+1}$。事实上，$p_{N+1} = \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu p_{N+1-\nu} + f_{N+1}$，若$f_{N+1} > 0$，则$p_{N+1} > 0$，所以由归纳法假设得 $d'_{N+1} = G.\ C.\ D.\ \{d'_N,\ N+1\} = G.\ C.\ D.\ \{d''_N, N+1\} = d''_{N+1}$；若$f_{N+1} = 0 = p_{N+1}$，则类似地有$d'_{N+1} = d''_{N+1}$；若$f_{N+1} = 0$，$p_{N+1} > 0$，则存在$\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant N$，使$f_\nu p_{N+1-\nu} > 0$。因此$d'_N | \nu$，$d''_N | (N+1-\nu)$，从而由$d'_N = d''_N$得$d'_N | (N+1)$，$d'_N | (N+1)$，所以$d'_{N+1} = d'_N = d''_N = d''_{N+1}$。总之，恒有 $d'_{N+1} = d''_{N+1}$(一切$N \geqslant s$)。引理证毕。

定理4.1. 若i是常返状态，其周期为d_i，则

$$\lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(nd_i)} = d_i / m_{i,i}, \tag{4.2}$$

(其中$m_{i,i}$是平均再现时间，当$b = \pm\infty$，a是实数时，此后恒定义$\frac{a}{b} = 0$)。

证 由于i是固定的，简记$p_{ii}^{(n)}$、$f_{ii}^{(n)}$，d_i，$m_{i,i}$为p_n，f_n，d，m。显然 $\{f_n;\ n \geqslant 1\}$、$\{p_n;\ n \geqslant 0\}$ 满足引理4.1的条件。令$r_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu$，$(n \geqslant 0)$，则

$$r_0 p_n = p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{\nu-1} - r_\nu) p_{n-\nu},$$

从而$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} r_\nu p_{n-1-\nu}$不依赖$n \geqslant 0$，但$r_0 p_0 = 1$，所以

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} \equiv 1, \quad (n \geqslant 0), \tag{4.3}$$

令$\lambda = \limsup_{n \to +\infty} p_{nd} = \limsup_{n \to \infty} p_n$。必有$\{n_k\}$使$\lim_{k \to \infty} p_{n_k d} = \lambda$。用(4.1)及$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$可证：

“$f_s > 0$，$\lim_{k \to \infty} p_{m_k} = \lambda \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} p_{m_k - s} = \lambda$”。

所以，反复利用上述推理可证：

"$t=\sum_{j=1}^{l} c_j s_j$，c_j，s_j 正整数，$f_{s_j}>0, 1\leqslant j\leqslant l \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} p_{n_k d-t}$

$=\lambda$"。用引理 4.1 及 d 之定义得知存在s_j，$f_{s_j}>0$，$1\leqslant j\leqslant l$，使 $d=G.C.D.\{s_1,\cdots,s_l\}$，所以由数论的一条初等定理可知：存在$s_0$

使"$s\geqslant s_0 \Longrightarrow sd=\sum_{j=1}^{l} c_j s_j$"。因此，$\lim_{k\to\infty} p_{(n_k-s)d}=\lambda$，$(s\geqslant s_0)$。以

$n=(n_k-s_0)d$代入(4.3)并注意$p_\nu=0$（当 $\nu\neq 0 \pmod d$），有

$$\sum_{\nu=0}^{n_k-s_0} r_{\nu d}\, p_{(n_k-s_0-\nu)d}=1.$$ 当$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}<\infty$时，在前式中令

$k\to\infty$ 并应用控制收敛定理（注意$\lim_{k\to\infty} p_{(n_k-s)d}=\lambda$，$s\geqslant s_0$）。

可得 $\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}=1$，而当 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}=\infty$ 时易证 $\lambda=0$。总之恒有

$\lambda=1\Big/\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}$。又因为 $f_\nu=0$ （当 $\nu\neq 0 \pmod d$），所以 $r_{\nu d}=$

$\frac{1}{d}\sum_{j=\nu d}^{\nu d+d-1} r_j$，从而 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}=\frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu=\frac{m}{d}$。所以$\lambda=\frac{d}{m}$。若令 $\beta=$

$\liminf_{n\to\infty} p_{nd}$，仿之可证 $\beta=\frac{d}{m}$。定理证毕。

系1. 设i，j同属于某个周期为d的常返类R_m^0（或R_+），$R_m^0=R_m^0(1)\cup\cdots\cup R_m^0(d)$，$i\in R_m^0(s)$，$j\in R_m^0(t)$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd+r)}=\begin{cases}0, & 若 r\neq t-s \pmod d\\ \dfrac{d}{m_{j,j}}, & 若 r=t-s \pmod d\end{cases} \qquad (4.4)$$

证 当$r\neq(t-s) \pmod d$，系1的论断显然成立。当$r=(t-$

s）(mod$d$) 时由命题3.3我们有 $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{i,j}^{(\nu d+r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{i,j}^{(\nu)} = 1$。再注意 $p_{j,j}^{(\nu)} = 0$ ($\nu \neq 0$ (mod$d$)) 有

$$p_{i,j}^{(nd+r)} = \sum_{\nu=0}^{n} f_{i,j}^{(\nu d+r)} p_{j,j}^{(nd-\nu d)}, \qquad (4.5)$$

在(4.5)中令$n \to \infty$并应用引理2.1及定理4.1即得(4.5)的第二式.

对于任何周期为d的状态j，令$f_{i,j}^{*}(r) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \ (\mathrm{mod}\ d)}}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}$。

定理4.2. (1) 若j不是正状态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$，$(i \in E)$;

(2) 若j是正状态，且周期为d_j，平均再现时间为$m_{j,j}$ 且

(a) 若 i 是常返状态但与j不在同一类中，则 $p_{i,j}^{(n)} = 0$ (一切 $n \geqslant 1$);

(b) 若 i, j 同属于一个正类， $i \in R_n^+(s)$， $j \in R_n^+(t)$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = \frac{d_j}{m_{j,j}}$，(当 $r = t-s$ (mod$d$))，$p_{i,j}^{(n)} = 0$，(当 $n \neq (t-s)$ (mod$d$));

(c) 若i是滑过状态，则对一切r有

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = f_{i,j}^{*}(r) \frac{d_j}{m_{j,j}}.$$

证 由命题2.2，3.2及定理4.1的系1即得(1)。由定理3.2得(2)(a)，由系1得(2)(b)，由(4.5)及引理2.1定理4.1得(2)(c)。

定理4.3. 对任何$i,j \in E$，总有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)} = \pi_{i,j} \qquad (4.6)$$

存在，其中 $\pi_{i,j} = f_{i,j}^{*}/m_{j,j}$，(当 j 不是常返状态时，定义 $m_{j,j} = +\infty$。)$\Pi = (\pi_{i,j},\ i,j \in E)$称为$P$的遍历极限。

证 由定理4.2即得。

定理4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}$ 存在的充要条件是每一个正状态的周期都是1。如果条件成立，则$\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\Pi=(\pi_{i,j},\ i,j\in E)$，$\pi_{i,j}$ 由定理4.3所定义。

证 由定理4.2、4.3即得。

下面我们研究Π的性质及求法。

命题4.1. 对于任何$i\in E$，$j\in R^+_n$($j\in R^0_n$类似)，有

$$f^*_{i,j}=f^*_{i,R^+_n},\quad (f^*_{i,R^+_n}\text{之定义见定义3.4}). \tag{4.7}$$

证
$$\begin{aligned}
f^*_{i,R^+_n}&=\sum_{k=1}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k\\ \bar{R}^+_n, & \cdots, & \bar{R}^+_n, & R^+_n\end{bmatrix}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k, & k+1, & k+2, & \cdots\\ \bar{R}^+_n, & \cdots, & \bar{R}^+_n, & R^+_n, & \bar{j}, & \bar{j}, & \cdots\end{bmatrix}\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}P^i\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k\\ \bar{R}^+_n, & \cdots, & \bar{R}^+_n, & R^+_n\end{bmatrix},\ \bigcup_{v=k+1}^{\infty}\begin{bmatrix}v\\ j\end{bmatrix}\right),
\end{aligned}\tag{4.8}$$

用(1.1)并注意$f^*_{s,j}=1$ $(s\in R^+_n)$ 可得(4.8)右边第一项为0。而第二项$=P^i\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k\\ \bar{R}^+_n, & \cdots, & \bar{R}^+_n, & R^+_n\end{bmatrix}\cap\bigcup\limits_{v=k+1}^{\infty}\begin{bmatrix}v\\ j\end{bmatrix}\right)\right)\leqslant P^i\left(\bigcup\limits_{v=1}^{\infty}\begin{bmatrix}v\\ j\end{bmatrix}\right)$ $=f^*_{i,j}$，所以$f^*_{i,R^+_n}\leqslant f^*_{i,j}$，而小于号不能成立，故$f^*_{i,j}=f^*_{i,R^+_n}$。

命题4.2. $\Pi=\Pi P=P\Pi=\Pi^2$。

证 用控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}
P\Pi&=P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}P^{(v)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}P^{(v)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n+1}P^{(v)}\right)\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}P\right]=\Pi.
\end{aligned}$$

用法都引理可得：

$$\Pi P=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\mathbf{P}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu+1)}\right)=\Pi,$$

若令$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$，则$\Pi P\mathbf{1}=\Pi\mathbf{1}$，故上式不等号不可能成立，所以$\Pi P=\Pi$。

由$\Pi=\Pi P$得$\Pi=\Pi P^{(n)}$，$(n\geqslant 0)$，所以$\Pi=\Pi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)$，$(n\geqslant 1)$，令$n\to\infty$并用控制收敛定理可得：$\Pi=\lim_{n\to\infty}\Pi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)=\Pi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)=\Pi^2$。命题证毕。

定理4.5. 记$E=N\cup R=N\cup R^0\cup R^+=N\cup\left(\bigcup_m R_m^0\right)\cup\left(\bigcup_n R_n^+\right)$，则$\Pi$具有下述形式：

	N	R^0	R_1^+	R_2^+	R_3^+	…
N	0	0	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	…
R^0	0	0	0	0	0	…
R_1^+	0	0	$B(1)$	0	0	…
R_2^+	0	0	0	$B(2)$	0	…
R_3^+	0	0	0	0	$B(3)$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

即$\pi_{i,j}=0$ $(i\in E,\ j\in N\cup R^0)$，$A(m)=(\pi_{i,j},\ i\in N,\ j\in R_m^+)$，

$B(n)=\Pi on R_n^+$，$\pi_{i,j}=0$ ($i\overline{\in}$ $(N\cup R_n^+)$，$j\in R_n^+$)。若记 $\pi'(n)$ $=\left(\frac{1}{m_{j,j}},\ j\in R_n^+\right)$是以$\frac{1}{m_{j,j}}$为分量定义域为$R_n^+$的行向量，$a(m)$ $=\binom{f^*_{i,R_m^+}}{i\in N}$是以$f^*_{i,R_m^+}$为分量定义域为$N$的列向量，则有 $B(n)$ $=1\pi'(n)$，$A(m)=a(m)\pi'(m)$，此外还有$B(n)1=1$，即是$B(n)$是行行一样的每个元素都大于0的转移阵。

证 用定理4.2及命题4.1，为证此定理，只须证明$B(n)1=1$即可。事实上，由命题 4.2，$\Pi=\Pi^2$ 得 $B(n)=B(n)^2$，即 $1\pi'(n)$ $=(1\pi'(n))(1\pi'(n))=1(\pi'(n)1)\pi'(n)=(\pi'(n)1)(1\pi'(n))$，由 $1\pi'(n)$每一元素均为正知 $\pi'(n)1=1$，故 $B(n)1=(1\pi'(n))1$ $=1(\pi'(n)1)=1$。定理证毕。

定义4.1. 称$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$是准转移阵，如果 $q_{i,j}\geqslant 0$，$\sum\limits_{k} q_{i,k}\leqslant 1$，($i$，$j\in E$)。称准转移阵$Q$具有$\Pi$结构，如果$E$可分成不交子集的并：$E=G\cup F_1\cup F_2\cup\cdots$ (G或F_n可为空集)，使Q具有下述形状：

	G	F_1	F_2	$\cdots$
G	0	$C(1)q'(1)$	$C(2)q'(2)$	$\cdots$
F_1	0	$1q'(1)$	0	$\cdots$
F_2	0	0	$1q'(2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

其中$C(m)$是以G为定义域的分量为非负实数的列向量，$q'(n)$ 是以F_n为定义域的分量为非负实数的行向量，且$q'(n)1=1$。

显然，若Q具有Π结构，则必有$Q^2=Q$，(注意 $q'(n)1=1$)。又由定理4.5，Π是具有Π结构的（取$G=N\cup R^0$，$F_n=R_n^+$，$q'(n)$ $=\pi'(n)$，$C(m)=\binom{a(m)}{0}$)。

命题4.3. 若$Q=(q_{ij}, i,j\in E)$是准转移阵，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}=\widetilde{\Pi}$存在且具有$\Pi$结构，($Q^{\nu}$是$Q$的$\nu$次幂)。

证 令Δ是E外之一点，$E_{\Delta}=E\cup\{\Delta\}$，($\{\Delta\}$表由$\Delta$构成的单点集)，$b=1-Q1$，则$Q_{\Delta}=\begin{pmatrix} Q & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$是定义在$E_{\Delta}$上的转移阵。由定理4.5知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q_{\Delta}^{\nu}=\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q^{\nu} & b_n \\ 0 & 1\end{pmatrix}$存在且有$\Pi$结构，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}$存在也有$\Pi$结构。

命题4.4. Q是准转移阵且$Q=Q^2$的充要条件是Q具有Π结构。

证 充分性由Π结构之定义即得。必要性由$Q=\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}$及命题4.3即得。

命题4.5. $f^*_{i,J}$ ($i\in E$, $J\subset E$) 具有下列性质：

(1) $f^*_{i,\phi}=0$，$f^*_{i,E}=1$，($i\in E$)；

(2) $J_1\subset J_2\Rightarrow f^*_{i,J_1}\leqslant f^*_{i,J_2}$；

(3) 对$f^*_{i,J}$对J具有完全半可加性；

(4) $\{J_{\nu}\}$不交封闭集$\Rightarrow f^*_{i,\bigcup_{\nu}J_{\nu}}=\sum f^*_{i,J_{\nu}}$；

(5) $J\subset E$固定，或则$f^*_{i,J}=1$ (一切$i\in E$)；或则$\inf\limits_{i\in\bar{J}}f^*_{i,J}=0$。

证 (1)、(2)显然成立。

(3) $$f^*_{i,\bigcup_{\nu}J_{\nu}}=P^i\Big(\bigcup_{n}\Big[\begin{matrix} n \\ \bigcup_{\nu}J_{\nu}\end{matrix}\Big]\Big)$$

$$=P^i\Big(\bigcup_{\nu}\bigcup_{n}\Big[\begin{matrix} n \\ J_{\nu}\end{matrix}\Big]\Big),\tag{4.9}$$

所以 $\quad f^*_{i,\bigcup_\nu J_\nu} \leqslant \sum_\nu f^*_{i,J_\nu}$。

(4) 若 $\{J_\nu\}$ 不交封闭，则当 $\mu \neq \nu$ 时，

$P^i\left(\left(\bigcup_n \begin{bmatrix} n \\ J_\nu \end{bmatrix}\right) \cap \left(\bigcup_n \begin{bmatrix} n \\ J_\mu \end{bmatrix}\right)\right) = 0$，故由(4.9)即得(4)。

(5) 用(1.1)得：

$$1 - f^*_{i,J} = P^i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \bar{J} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j \in \bar{J}} P^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & n-1, & n \\ \bar{J}, & \cdots, & \bar{J}, & j \end{bmatrix}\right) P^j\left(\begin{bmatrix} 1, & 2, & \cdots \\ \bar{J}, & \bar{J}, & \cdots \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j \in \bar{J}} P^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & n-1, & n \\ \bar{J}, & \cdots, & \bar{J}, & j \end{bmatrix}\right) (1 - f^*_{j,J})$$

$$\leqslant P^i\left(\bigcap_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} k \\ \bar{J} \end{bmatrix}\right) (1 - \inf_{j \in \bar{J}} f^*_{j,J}),$$

令 $n \to \infty$ 即得：$1 - f^*_{i,J} \leqslant (1 - f^*_{i,J})\ \ (1 - \inf_{j \in \bar{J}} f^*_{j,J})$，(5)得证。

令$\gamma = \Pi \mathbf{1}$，则

$$\gamma = \begin{matrix} N \\ R^0 \\ R^+ \end{matrix} \begin{pmatrix} \sum_m a(m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

即是γ on $N = \sum_m a(m)$，γ on $R^0 = 0$，γ on $R^+ = \mathbf{1}$，$a(m)$，Π之定义见定理4.5。

本书中恒用 $(m)_J$ 表示定义域为J的分量有界的列向量全体；$(l)_J$表示定义域为J的诸分量之绝对值之和收敛的行向量的全体，若$J = E$，则简记$(m)_E$、$(l)_E$为(m)、(l)。用e_i(e'_i)表示对应于 i

的分量为1其它分量为0的列(行)向量，其维数视需要而定。

命题4.6. $\{e_i'\gamma;\ i\in E\}$或则无0或则有无穷多个0。

证 若R^0不空，则P on R^0是转移阵，而$\lim\limits_{n\to\infty}(P^{(n)}\text{ on }R^0)=0$，故$R^0$必为无穷集，由(4.10)知$\{e_i'\gamma,\ i\in E\}$有无穷多个0。

若R^0是空集，再设$\{i|e_i'\gamma=0,\ i\in E\}\neq\varnothing$. 由(4.10)和命题4.5(4)及定理4.5知：当$i\in N$时有 $e_i'\gamma=\sum\limits_m f_{i;R_m^+}^*=f_{i,R^+}^*$.所以由(4.10) 及 R^0 是空集知：$\varnothing\neq\{i|e_i'\gamma=0,\ i\in E\}=\{i|e_i'\gamma=0,\ i\in\bar{R}^+\}=\{i|f_{i,R^+}^*=0,\ i\in\bar{R}^+\}=\hat{R}^+\bar{R}^+$. ($\hat{R}^+$ 之定义见定义3.4) 若R^+是空集，则$e_i'\gamma\equiv0$，$(i\in E)$，命题4.6成立，若R^+非空，用命题3.4知$\hat{R}^+\ \bar{R}^+$为封闭集，故P on $(\hat{R}^+\ \bar{R}^+)$ 是转移阵，若注意$\hat{R}^+\ \bar{R}^+\subset N$，($\because R^0$是空集)知 $\lim\limits_{n\to\infty}(P\text{ on }\hat{R}^+\ \bar{R}^+)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ (P^{(n)}\text{ on }\hat{R}^+\ \bar{R}^+)=0$，所以$\hat{R}^+\ \bar{R}^+$是无穷集，命题4.6证毕。

命题4.7. 下列陈述等价：

(1) Π是转移阵；

(2) $R^0=\varnothing$，$f_{i,R^+}^*=1$，$(i\in N)$；

(3) $\inf\{e_i'\gamma,\ i\in E\}>0$.

证 由(4.10)及$e_i'\gamma=f_{i,R^+}^*$ $(i\in N)$知 (1)$\Longleftrightarrow$(2)。而(1)$\Rightarrow$(3)显然，下面证明(3)$\Rightarrow$(2)。若(3)成立，则 $R^0=\varnothing$，$\inf\limits_{i\in N}f_{i,R^+}^*=\inf\limits_{i\in\bar{R}^+}f_{i,R^+}^*>0$,用命题4.5(5)得$f_{i,R^+}^*=1$(一切$i\in E$),故 (2)成立。

由命题 4.1，4.7 及定理 4.3 知："$\Pi=\mathbf{1}\pi'$，$\pi'\mathbf{1}=1$，$\pi'\geqslant0$ $\Longleftrightarrow R^0=\varnothing$，恰有一正类，且$f_{i,R_1^+}^*=1$，$(i\in N)$。"

定义4.2. 称转移阵P(或对应的P链)是无耗损的，如果Π是转移阵，反之称P是耗损的。

引理4.2. 设$\alpha'(n)=(\alpha_0(n),\ \alpha_1(n),\cdots)$,$\alpha'=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)$,
$\alpha'(n)\geqslant0$，$\alpha'(n)\mathbf{1}=1$，$(n\geqslant1)$，$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha'(n)=\alpha'$. 若

下列两条件之一成立：

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)=0$；

(2) $\alpha'(n)\beta\leqslant c$，$(n\geqslant 1)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=+\infty$，$\beta\geqslant 0$，则 $\alpha'1=1$。

证 设(1)成立，则任给$\varepsilon>0$，存在k_0，使 $\sup\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{i=k_0}^{\infty}\alpha_i(n)<\frac{\varepsilon}{2}$。再用$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha'(n)=\alpha'$得：存在$N_0$使$|\alpha_i(N_0)-\alpha_i|<\frac{\varepsilon}{2k_0}$，$(i=1,2,\cdots,k_0)$。所以 $\alpha'1\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k_0}\alpha_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k_0}\left(\alpha_i(N_0)-\frac{\varepsilon}{2k_0}\right)\geqslant 1-\sum\limits_{i=k_0}^{\infty}\alpha_i(N_0)-\frac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon$。由$\varepsilon$之任意性得 $\alpha'1\geqslant 1$，再用法都引理得 $\alpha'1=1$。

设(2)成立。则$c\geqslant\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)\beta_i\geqslant(\inf\limits_{i\geq k}\beta_i)\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)$，故 $\sup\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)\leqslant c/\inf\limits_{i\geq k}\beta_i$，由(2)即得(1)。引理4.2证毕。

定理4.6. 设$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix}\geqslant 0$，$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\infty$，$P\beta\leqslant\beta$，则$P$是无耗损的。

证 任取$i\in E$固定，令$\alpha'(n)=e_i'\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}P^{\nu}\right)$，$\alpha'=e_i'\Pi$，用引理4.2(2)即得$\alpha'1=1$，故$\Pi 1=1$。定理得证。

定理4.7. 设$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix}\geqslant 0$，$\alpha$是正实数，

$P\beta<\infty$, $e_i'P\beta\leqslant e_i'\beta-a$(除去$E$中有限个$i$)，则$P$是无耗损的。

证 由假设知：存在$b>0$使 $P\beta\leqslant\beta+b\mathbf{1}$，故$P^{(n)}\beta<\infty$，($n\geqslant1$)。再用假设，存在$c>0$及一个列向量$\alpha$，$\alpha$只有有限个分量为1其它为0，使$P\beta\leqslant\beta-a\mathbf{1}+c\alpha$。由$P\beta+a\mathbf{1}\leqslant\beta+c\alpha$得 $\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)$ $P\beta+a\mathbf{1}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\beta+c\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\alpha$，注意 $P^{(n)}\beta<\infty$ ($n\geqslant1$) 可得：$a\mathbf{1}\leqslant\frac{1}{n}P\beta-\frac{1}{n}P^{(n+1)}\beta+c\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\alpha$。令$n\to\infty$ 即得$a\mathbf{1}\leqslant c\Pi\alpha\leqslant c\Pi\mathbf{1}=cr$。故$\inf\{e_i'r, i\in E\}\geqslant\frac{a}{c}>0$，所以由命题4.7知$P$是无耗损的。

定义4.3. 称分布行β'($\beta'\geqslant0$，$\beta'1=1$)是转移阵P（或对应的P链）的平稳分布或不变测度或谱测，如果$\beta'P=\beta'$。

称"$x'P=x'$，$x'\in(l)$，$x'\geqslant0$"为左方程。

定理4.8. 下列四条阵述等价：

(1) 方程"$x'P=x'$，$x'\in(l)$，"有非0解；

(2) 有正状态存在；

(3) 左方程有非0解；

(4) P有平稳分布存在。

证 先考察"$x'P=x'$，$x'\in(l)$"的通解。用控制收敛定理可得：若$x'P=x'$，$x'\in(l)$，则$x'\Pi=x'$，$x'\in(l)$。再用定理4.5得：x' on$(N\cup R^0)$为0，若记x' onR_n^+为s_n'，则再用定理4.5有

$$x'=(0,\ 0,\ s_1',\ s_2'\cdots)=(0,\ 0,\ s_1',\ s_2'\cdots)\Pi$$

$$=(0,0,s_1',s_2',\cdots)\begin{pmatrix}0&0&a(1)\pi'(1)&a(2)\pi'(2)&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\0&0&1\pi'(1)&0&\cdots\\0&0&0&1\pi'(2)&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\end{pmatrix}$$

$=(0,\ 0,\ s_1\pi'(1),\ s_2\pi'(2),\ \cdots)$,

即$x'on(N\cup R^0)=0$，$x'onR_n^+=s_n\pi'(n)$，$s_n=s_n'1$，$\sum_n|s_n|<\infty$。

反之，任给满足上述要求之x'，必满足

$x'P=x'$，$x'\in(l)$，故"$x'P=x'$，$x'\in(l)$"之通解为：

$$\begin{cases} \quad\ \ N\quad R^0\qquad R_1^+\qquad\ R_2^+\qquad \cdots \\ x'=(0,\ 0,\ s_1\pi'(1),\ s_2\pi'(2),\ \cdots) \\ \sum_n|s_n|<\infty. \end{cases} \tag{4.11}$$

(1)⇒(2)　由通解之形状立得。

(2)⇒(3)　在(4.11)中取$s_1>0$，$s_i=0$，$(i>1)$即为左方程之非0解。

(3)⇒(4)。设x'是左方程之非0解，取$\beta'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'$即为$P$之平稳分布。

(4)⇒(1)，显然。

定理4.9.　若P是不可约的，则

(1) 左方程只有零解⇒　$\Pi=0$；

(2) 左方程有非零解⇒　$\Pi=\mathbf{1}\pi'$，其中$\pi'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'$，$x'$是左方程之唯一非零解（常因子除外），$E=R_1^+$，且$\pi'$是$P$的唯一的平稳分布。

证　(1)　由左方程只有零解，用定理4.8知：无正状态，故$\Pi=0$。

(2)　由左方程有非零解知有正状态存在，而P不可约，故$E=R_1^+$。故左方程之非0解为：$x'=s_1\pi'(1),s_1>0$，而$\Pi=\mathbf{1}\pi'(1)$，故$\Pi=\mathbf{1}\left(\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'\right)$。由$\Pi P=\Pi$知$\pi'=\pi'(1)$是$P$的唯一的平稳分布。

对一般的转移阵P而言（可能是可约的），解左方程，其通解必为0的地方对应的状态就是$N\cup R^0$，其余的地方就是R_1^+，R_2^+，…，而且$\pi'(n)$也得出了。根据定理4.5Π的结构，只须求出$a(m)$，Π就完全求出了。下述定理就回答了$a(m)$的求法。

定理4.10. 对任何转移阵P而言，

$$\begin{matrix} N \\ R^0 \\ \bigcup\limits_{i<m} R_i^+ \\ R_m^+ \\ \bigcup\limits_{i>m} R_i^+ \end{matrix} \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{是} \ll P \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \gg \text{的最小}$$

解。

证 由$P\Pi=\Pi$并应用定理4.5Π的结构再注意$\pi'(m)>0$即可发现它是解。再证最小性。任取上方程一个解

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

必有

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{\nu}\right) \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

令$n\to\infty$并用法都引理及定理4.5Π的结构可得，

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant \Pi \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant \Pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

至此，Π的求法及$N \cup R^0$与$\bigcup_n R_n^+$的区分已经解决。本节最后一个问题就是要区分N与R^0。

命题4.8. 任取$J \subset E$，$J \neq \varnothing$，$A = PonJ$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = a$ 存在；

(2) $Aa = a$，且a是≪$Ay = y$，$0 \leqslant y \leqslant 1$≫的最大解；

(3) $a_i = e_i' a = 1 - f_{i,\bar{J}}^*$，$(i \in J)$；

(4) 令$\tilde{a}_i = a_i\ (i \in J)$，$\tilde{a}_i = 0$，$(i \in \bar{J})$，$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_i \\ i \in E \end{pmatrix}$，则 $e_i'(P\tilde{a}) = 1 - f_{i,\bar{J}}^*$，$(i \in E)$。

证 任取$i \in J$，则由测度P^i的定义有$e_i'(A^n \mathbf{1}) = P^i\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} k \\ J \end{bmatrix}\right)$，故(1)、(3)得证。再证(2)。用控制收敛定理得$Aa = A\lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n+1} \mathbf{1} = a$。若$Ay = y$，$0 \leqslant y \leqslant 1$，则$y = A^n y \leqslant A^n \mathbf{1}$，从而$y \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = a$，(2)得证。最后证(4)。用(3)有

$$1 - f_{i,\bar{J}}^* = P^i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j \in J} p_{i,j} P^j\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j \in J} p_{i,j}(1 - f_{j,\bar{J}}^*)$$

$$= \sum_{j \in J} p_{i,j}(e_j' a)$$

$$= \sum_{j\in E} p_{i,j}\bar{a}_j$$

$$= e_i'(P\bar{a})。$$

命题4.9. 下列陈述等价：

(1) $f^*_{i,\bar J}\equiv 1$，$(i\in E)$；

(2) $f^*_{i,\bar J}=1$，$(i\in J)$；

(3) $a=0$，(a之定义见命题4.8)；

(4) $\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$只有0解。

证 (1)⇒(2)显然。(2)⇒(3)，只须注意$e_i'a=1-f^*_{i,\bar J}(i\in J)$。(3)⇒(4)，设$y$为方程之解，不妨令$Ay=y$，$0\leqslant y\leqslant 1$，由命题4.8(2)有$0\leqslant y\leqslant a$，而今设$a=0$，故$y=0$，(4)成立。(4)⇒(1)。由(4)成立，再用命题4.8(2)得$a=0$，从而$P\bar{a}=0$。但$e_i'P\bar{a}=1-f^*_{i,\bar J}$，$(i\in E)$，所以$f^*_{i,\bar J}\equiv 1$，$(i\in E)$。

系1. 设A为状态j之余阵，即是$A=Pon(E-\{j\})$，则下列陈述等价：

(1) $f^*_{i,j}\equiv 1$，$(i\in E)$；

(2) $f^*_{i,j}=1$，$(i\neq j)$；

(3) $a=0$，$(a=\lim\limits_{n\to\infty}A^n 1)$；

(4) $\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$只有0解。

定理4.11. 任取状态j，设A为j之余阵，则

(1) $\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$只有0解⇒$j$是常返状态；

(2) $\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$有非0解，且$P$不可约⇒$j$是滑过状态。

证 由命题4.9系1中(1)⟺(4)即得本定理的(1)。再证(2)。若P不可约，j是常返状态，则$f^*_{i,j}\equiv 1(i\in E)$，再用命题4.9的系知$\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$只有0解，(2)证毕。

我们称$\ll Py=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$为右方程。如$A$为$j$之余阵，即$A=Pon(E-\{j\})$，则称$\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$为$j$右方程，引进

条件(LC)：左方程有非0解；

条件$(RC)_j$：j右方程有非0解；

条件(RC)：右方程有非0解。

$(\overline{LC})$（$(\overline{RC})$、$(\overline{RC})_j$）表(LC)（(RC)、$(RC)_j$）之逆。

定理4.12. 设P不可约，则

(1) $(LC) \Longleftrightarrow E = R_1^+ \Rightarrow (\overline{RC})_j$，（一切$j \in E$）；

(2) (LC)，$(RC)_j$（对某个$j \in E$）$\Longleftrightarrow$ $(\overline{LC})$，$(\overline{RC})_j$（对一切$j \in E$）$\Longleftrightarrow E = R_1^0$；

(3) $(RC)_j$（对某个$j \in E$）$\Longleftrightarrow$ $(RC)_j$（对一切$j \in E$）$\Longleftrightarrow E = N$。

证 由定理4.11及左方程之通解的形式即得定理4.12。

定理4.13. 下列陈述等价：

(1) E不是一个常返类；

(2) $\ll Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m) \gg$有非常向量解；

(3) $\ll Py \leqslant y,\ y \geqslant 0 \gg$有非常向量解。

（常向量者，即诸分量相等之向量）。

证 (1)$\Rightarrow$(2)。先设E有滑过状态。不妨令$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$，0是滑过状态。取

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ f^*_{1,0} \\ f^*_{2,0} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

由命题2.8有 $P\tilde{y} = \begin{pmatrix} f^*_{0,0} \\ f^*_{1,0} \\ \vdots \end{pmatrix} \leqslant \tilde{y}$。显然$f^*_{i,0}$ $(i \geqslant 1)$不能全是1（否则由命题4.9的系得$f^*_{0,0} = 1$，这与0是滑过状态矛盾），而且由$f^*_{0,0} < 1$知$P\tilde{y} \neq \tilde{y}$。总之，当$E$有滑过状态时，

$\ll Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m),\ Py \neq y \gg$

有非常向量解$\tilde{y}$。

再设E无滑过状态，由(1)成立和E至少含两个常返类，不妨令R_1^+，R_2^+非空，取向量y^*满足：$e_i'y^*=c_1\geqslant 0$，（$i\in R_1^+$），$e_j'y^*=c_2\geqslant 0$；（$j\in R_2^+$），$c_1\neq c_2$，$e_k'y^*=0$，（$k\in E-(R_1^+\cup R_2^+)$），则$Py^*=y^*$。故

$\ll Py\leqslant y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$

有非常向量解y^*，(1)⇒(2)证毕

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(1)。令$E=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，$\tilde P=(\tilde P_{i,j},\ i,\ j\in E)$，$\tilde P_{0,0}=1$，$\tilde P_{0,j}=0$，$(j\geqslant 1)$，$\tilde P_{i,j}=p_{i,j}$　$(i\geqslant 1,\ j\in E)$，$\tilde\Pi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\tilde P^{(\nu)}$，$A=Pon(E-\{0\})=\tilde Pon(E-\{0\})$，则

$$\tilde P^{(n)}e_0=\tilde P^{(n)}\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ A^n\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

由命题4.8(1)及(3)得（取$\{0\}$为那儿的J）：

$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde P^{(n)}e_0=\bar y$，（$\bar y$之定义见前）

从而$\tilde\Pi e_0=\bar y$。下面证明：$\bar y$是$\ll Py\leqslant y,\ y\geqslant 0,\ e_0'y=1\gg$的最小解。$\bar y$是解在(1)⇒(2)的证明中已证。再证最小性，若$y\geqslant 0$，$e_0'y=1$，$y\geqslant Py$，则$y\geqslant\tilde Py\geqslant\cdots\geqslant\tilde P^{(n)}y$，从而$y\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\tilde P^{(\nu)}\right)y$，令$n\to\infty$用法都引理得$y\geqslant\tilde\Pi y\geqslant\tilde\Pi e_0=\bar y$。最小性证毕。现在设(3)成立，即存在$y\geqslant 0$，$y\geqslant Py$，$y$是非常向量。不妨令$e_0'y>e_1'y$，又不妨令$e_0'y=1>e_1'y$(否则以$e_0'y$除此向量)。由$\bar y$之最小性知$\bar y\leqslant y$，更有$f_{1,0}^*=e_1'\bar y\leqslant e_1'y<1$，所以$E$不是一个常返类。定理证毕。

定理4.14. 下列陈述等价：

(1) E有滑过状态；

(2) $\ll Py\leqslant y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m),\ Py\neq y\gg$有解；

(3) $\ll Py\leqslant y,\ y\geqslant 0,\ Py\neq y\gg$有解。

证 (1)⇒(2)。(定理4.13的(1)⇒(2)中已证)。

"(2)⇒(3)"显然成立。

(3)⇒(1)。设$y \geqslant Py$, $y \geqslant 0$, $Py \neq y$。作

$P^* = diag([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)Pdiag([1+e_i'y],\ i \in E)$, (其中$diag(q_i,\ i \in E)$表对角矩阵，主对角线上对应于$i$的元素为$q_i$。)

则$e_i'P^{(\nu)}e_i = e_i'(P^*)^{\nu}e_i$, $\left(\begin{matrix}\nu \geqslant 0 \\ i \in E\end{matrix}\right)$且

$$P^*\mathbf{1} = diag([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)P(\mathbf{1}+y)$$
$$\leqslant diag([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)(\mathbf{1}+y) = \mathbf{1},$$

由$Py \leqslant y$, $Py \neq y$知上式中等号不能成立，故

$$\mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \geqslant 0,\quad \mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \neq 0,$$

所以存在$i_0 \in E$及正数c使$\mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \geqslant ce_{i_0}$。因此 $\mathbf{1} \geqslant \sum_{\nu=0}^{n-1}(P^*)^{\nu}(\mathbf{1} - P^*\mathbf{1}) \geqslant c\sum_{\nu=0}^{n-1}(P^*)^{\nu}e_{i_0}$。特别地，有 $1 \geqslant e_{i_0}'c\sum_{\nu=0}^{n-1}(P^*)^{\nu}e_{i_0} = c\sum_{\nu=0}^{n-1}e_{i_0}'P^{(\nu)}e_{i_0} = c\sum_{\nu=0}^{n-1}p_{i_0 i_0}^{(\nu)}$, $(n \geqslant 1)$。所以$\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{i_0 i_0}^{(\nu)} < \infty$, 即 i_0是滑过状态。

定理4.15. 设$\tilde{P}$如定理4.13所定义，若$\tilde{P}$是无耗损的，则P有常返状态。

证 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 若 1, 2, … 都是 P 的滑过状态，则$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)} < \infty$, $(i \geqslant 1)$。又由$\tilde{P}$之定义知$\tilde{p}_{ii}^{(n)} \leqslant p_{ii}^{(n)}$, $(i \geqslant 1,\ n \geqslant 0)$, 所以1, 2, …都是$\tilde{P}$的滑过状态，所以$\tilde{\Pi}e_i = 0$, $(i \geqslant 1)$,

从而由$\tilde{P}$之无耗损性得$\mathbf{1} = \tilde{\Pi}\mathbf{1} = \tilde{\Pi}\sum_{i \in E}e_i = \tilde{\Pi}e_0 = \tilde{y} = \begin{pmatrix}1 \\ f_{0,1}^* \\ f_{0,2}^* \\ \vdots\end{pmatrix}$.

所以$f^*_{0,i}=1$，$(i\geq 1)$，再用命题4.9的系得$f^*_{0,0}=1$，此即0是常返状态。

§5. 例 子

在这一节中，仍设E是可数集，$P=(p_{ij},i,j\in E)$是E上的转移阵，$P^{(n)}=(p^{(n)}_{ij},i,j\in E)$是$n$步转移阵，$\Pi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}P^{(v)}$，$E=N\cup R=N\cup R^0\cup R^+=N\cup(\bigcup\limits_m R^0_m)\cup(\bigcup\limits_n R^+_n)$。

本节主要研究二类问题？**一是**：当E为有限集时，P之状态空间E及Π有何特性；**二是**：当E为可数无穷集时，有各种实际背景的特殊的P的状态空间E及Π的特性及Π的求法。

先设E是有限集，P是E上之转移阵，有

命题5.1. $R^0=\phi$，$R^+\neq\phi$。

证 由E为有限集和Π是转移阵，再用定理4.5Π的结构即得命题5.1。

命题5.2. 下列二条件等价：

(1) Π没有O列；(2) E没有滑过状态。

证 由$R^0=\phi$及定理4.5即得。

命题5.3. 下列两条件等价：(1) Π行行一样，即$\Pi=\mathbf{1}\pi'$；(2) E恰含一个正类（N可能非空）。

证 "(1) ⇒(2)"乃显然。(2) ⇒(1)，设$E=R^+_1\cup N$，若$N=\emptyset$，由定理4.5得Π行行一样，若$N\neq\emptyset$，取$i\in N$，由$\Pi\mathbf{1}=\mathbf{1}$及命题4.7有$f^*_{i,R^+_1}=1$，故再用定理4.5知Π行行一样。

命题5.4. 下列五条件等价：

(1) $\Pi>0$；

(2) 对任何$i,j\in E$，存在正整数n（可依赖i,j），使$p^{(n)}_{ij}>0$；

(3) P是不可约的；

(4) $E=R^+_1$；

(5) $\Pi>0$，且$\Pi=1\pi'$行行一样。

证 (1)⇒(2) 给定i，j，若$p_{i,j}^{(n)}=0$，(一切$n\geq1$)，则$\pi_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(\nu)}=0$，故(1)⇒(2)。

(2)⇒(3) 由(2)得$f_{i,j}^{*}>0$，(一切$i,j\in E$)，故P不可约。

(3)⇒(4) 由命题5.1及定理3.2即得。

(4)⇒(5) 由定理4.5即得。

(5)⇒(1) 显然。

命题5.5. 下列二条件等价：

(1) P不可约且周期$d=1$；

(2) 存在正整数M，使$P^{(M)}>0$。

证 (1)⇒(2)。由P不可约及命题5.4知$\pi_{i,j}>0$，由$d=1$知$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=\pi_{i,j}$，$(i,j\in E)$。注意$E$为有限集可知$\exists M$，当$n\geq M$有$p_{i,j}^{(n)}>0$，$(i,j\in E)$。

(2)⇒(1)。若P可约，或P不可约但$d>1$，由定理3.2及3.3看出无论n为何数，$P^{(n)}$总有0元素。

命题5.6. 设E恰含S个元素，则

(1) $f_{i,i}^{*}>0$⇒存在正整数$m\leqslant S$，使$p_{i,i}^{(m)}>0$；

(2) $f_{i,j}^{*}>0$，$i\neq j$⇒存在正整数$m\leqslant S-1$，使$p_{i,j}^{(m)}>0$。

证 由矩阵论Cayley定理，$P^{(S)}$可表成I，$P,\cdots,P^{(S-1)}$的线性组合（I是单位阵），从而对任何$n\geq S$，$P^{(n)}$亦也表为$I,P,\cdots,P^{(S-1)}$的线性组合，令$P^{(n)}=\sum_{i=1}^{S}C_{n,i}P^{(S-i)}$，$(n\geq s)$。若$i\neq j$且$p_{i,j}^{(\nu)}=0$，$(\nu=1,2\cdots,S-1)$，则$p_{i,j}^{(n)}=0$，(一切$n\geq1$)，故$f_{i,j}^{*}=0$。(2)得证。由$P^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{S}C_{n,i}P^{(S+1-i)}$知：若$p_{i,i}^{(\nu)}=0$，$(\nu=1,2,\cdots,S)$，则$p_{i,i}^{(n)}=0$，(一切$n\geq1$)，从而$f_{i,i}^{*}=0$，故(1)得证。

命题5.7. 1是P的特征根且对P的任何特征根λ，都有$|\lambda|\leqslant1$。

证 由 $(I-P)1=0$知 1 是P之特征根。再设λ是P之特征根，则有x'使：$x'(\lambda I-P)=0$，$x'\neq 0$，$x'=(x_i, i\in E)$。

由$\lambda x_j=\sum\limits_{i\in E} x_i p_{i,j}$，$(j\in E)$ 得：

$$|\lambda|\sum_{j\in E}|x_j|\leqslant\sum_{i\in E}|x_i|\sum_{j\in E}p_{i,j}=\sum_{i\in E}|x_i|,$$

故$|\lambda|\leqslant 1$。

命题5.8. $\Pi=\lim\limits_{\lambda\to 1-0}(1-\lambda)(I-\lambda P)^{-1}$。

证 由命题 5.7，P 之任一特征根之模皆不大于 1，所以$(I-\lambda P)^{-1}$存在（当$\lambda<1$），且 $(I-\lambda P)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n P^n$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}P^{\nu}=\Pi,$$

所以

$$\lim_{\lambda\to 1-0}(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n P^n=\Pi.$$

命题得证。

例5.1. 自由随机徘徊，设$E=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$，$p_{i,i-1}=q_i, p_{i,i+1}=p_i, p_i>0, q_i>0, p_i+q_i=1$，$(i\in E)$，$p_{i,j}=0$（当$|i-j|>1$或$i=j$）。

显然P是不可约的，周期$d=2$。解

$x'P=x'$，（记$x'=(x_i, i\in E)$）得：

$$(p_{i-1}x_{i-1}-q_i x_i)=(p_i x_i-q_{i+1}x_{i+1})=c,\quad (i\in E).$$

所以由$Mc=\sum\limits_{i=1}^{M}(p_{i-1}x_{i-1}-q_i x_i)$ 得$|Mc|\leqslant 2\sum\limits_{i=0}^{M}|x_i|$，$(M\geqslant 1)$。

因此 《$x'=x'P$，$x'\in(l)$》的通解为：

$$(p_{i-1}x_{i-1}-q_i x_i)=0,\quad (i\in E),$$

即是：

$$x_i=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}x_0,\quad (i>0)$$

$$x_{-i}=\frac{q_0q_{-1}\cdots q_{-i+1}}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}}x_0,\quad (i>0).$$

令

$$\delta=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}+\frac{q_0q_{-1}\cdots q_{-i+1}}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}}\right),$$

从$x'P=x'$，$x'\in(l)$的通解的形式看出：

当$\delta=\infty$时，左方程只有0解，故$\Pi=0$；

当$\delta<\infty$时，左方程有非0解 $x'=(x_i,i\in E)$，其中 $x_0=1$，$x_i=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}$，$(i>0)$，$x_{-i}=\frac{p_0q_{-1}\cdots q_{-i+1}}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}}$，$(i>0)$，所以 $\Pi=\frac{1}{x'1}1x'=\frac{1}{1+\delta}1x'$。

考虑 $A=Pon(E-\{0\})$为0之余阵，解O右方程≪$Ay=y$，$y\geqslant0,y\in(m)$≫。由$Ay=y$得：$\left(令y=\binom{y_i}{i\in E-\{0\}}\right)$

$$y_{i+1}=\left(1+\frac{q_1}{p_1}+\cdots+\frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i}\right)y_1,\quad i\geqslant1,$$

$$y_{-(i+1)}=\left(\frac{1+p_{-1}}{q_{-1}}+\cdots+\frac{p_{-1}\cdots p_{-i}}{q_{-1}\cdots q_{-i}}\right)y_{-1},\quad i\geqslant1.$$

令

$\theta_1=\left(1+\frac{q_1}{p_1}+\cdots+\frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i}+\cdots\right)$，$\theta_2=\left(1+\frac{p_{-1}}{q_{-1}}+\cdots+\frac{p_{-1}\cdots p_{-i}}{q_{-1}\cdots q_{-i}}+\cdots\right)$，则由定理4.12有：

$$\delta<\infty(即(Lc))\Longleftrightarrow E=R_1^-;$$

$\delta=\infty$，$\theta_1=\theta_2=\infty$(即$(\overline{Lc})$，$(\overline{Rc})_0$)$\Longleftrightarrow E=R_1^0$；

θ_1，θ_2中至少有一个有限(即$(Rc)_0$)$\Longleftrightarrow E=N$。

例5.2. O处有反射屏的随机徘徊。设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,\ j\in E)$，$p_{0,0}=a_0$，$p_{0,1}=b_0$，$p_{0,j}=0$，$(j>1)$，当 $i\geqslant 1$时：$p_{i,i-1}=a_i$，$p_{i,i+1}=b_i$，$p_{i,j}=0$ $(i=j$ 或$|i-j|>1)$。$a_i+b_i=1$ $(i\in E)$，$a_i>0$，$(i\geqslant 1)$，$b_i>0$ $(i\geqslant 0)$。

显然P是不可约的。解$x'=x'P$，$(x'=(x_0,x_1,\cdots))$，即

$$(x_0,x_1,x_2,\cdots)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$$

得：

$$x_{n+1}=\frac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1}a_n\cdots a_1}x_0,\quad (n\geqslant 0).$$

令$\delta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1}a_n\cdots a_1}$，则$\delta<\infty\Longleftrightarrow(Lc)$。故

$\delta=\infty\Rightarrow\Pi=0$；

$\delta<\infty\Rightarrow\Pi=1\pi'$，$\pi'=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$，

$$\pi_{n+1}=\frac{1}{1+\delta}\left(\frac{b_n b_{n+1}\cdots b_0}{a_{n-1}a_n\cdots a_1}\right),\quad (n\geqslant 0),\quad \pi_0=1/(1+\delta).$$

考虑$A=Pon(E-\{0\})$为O的余阵。解 O 右方程≪$Ay=y$，$y\geqslant 0$，$y\in(m)$≫。记

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

由$Ay=y$得：$y_2-y_1=\dfrac{a_1}{b_1}y_1$，$(y_{n+1}-y_n)=\dfrac{a_n}{b_n}(y_n-y_{n-1})$

$=\dfrac{a_1 a_2\cdots a_n}{b_1 b_2\cdots b_n}y_1$，$(n\geqslant 2)$，故把上述各式求和即发现：

$$y_{n+1}=\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}\right)y_1,\quad (n\geqslant 1).$$

若令$\theta=\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}+\cdots\right)$ 则$\theta<\infty\Longleftrightarrow 0$右方程有非 0 解。

所以

$$\delta<\infty\Longleftrightarrow E=R_1^+;$$
$$\delta=\infty,\quad \theta=\infty\Longleftrightarrow E=R_1^0;$$
$$\theta<\infty\Longleftrightarrow E=N.$$

例5.3. 在O处具有吸收屏的随机徘徊。设$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},i,j\in E)$，$p_{0,0}=1$，$p_{0,j}=0$，当$i\geqslant 1$时；$p_{i,i-1}=q_i$，$p_{i,i+1}=p_i$，$p_{i,j}=0$（当$i=j$或 $|i-j|>1$），$p_i+q_i=1$，$p_i>0$，$q_i>0$。

显然 P 是可约的，0 是正状态，其它都是滑过 状 态，因此 $\Pi=(\pi_{i,j},i,j\in E)$满足$\pi_{0,0}=1$，$\pi_{i,0}=a_i$，$(i\geqslant 1)$，$\pi_{i,j}=0$，$(i\in E, j\geqslant 1)$，即

$$\Pi=\begin{pmatrix}1 & \\ a_1 & 0\\ a_2 & \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

用定理 4.10，$\begin{pmatrix}1\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\end{pmatrix}$是

(U)； $\ll P\begin{pmatrix}1\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\end{pmatrix}$，$0\leqslant y_i\leqslant 1$，$(i\geqslant 1)\gg$的最小解。解之得：

$$y_n=q_ny_{n-1}+p_ny_{n+1},\quad (n\geqslant 1),\quad y_0=1.$$

即$q_n(y_n-y_{n-1})=p_n(y_{n+1}-y_n)$，$(n\geqslant 1)$，故

$$(y_{n+1}-y_n)=\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}(y_1-1),\ (n\geqslant 1).$$

对 n 从1到k求和得：

$$(y_{k+1}-1)=\left(1+\sum_{n=1}^{k}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}\right)(y_1-1),\ (k\geqslant 1).$$

令$\beta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}$，则

（1）当$\beta=\infty$时，方程（U）恰有唯一解

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\end{pmatrix}=\mathbf{1}\text{，故}\Pi=(\mathbf{1}\ 0)\text{，且}f^*_{i,0}=a_i=1\text{，}(i\in E).$$

（2）当$\beta<\infty$时，对(U)的任一解 $y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\end{pmatrix}$，有$0\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}y_k=1+\beta(y_1-1)$。故$y_1\geqslant 1-\frac{1}{\beta}$，从而 $y_{k+1}\geqslant 1-\frac{1}{\beta}\left(1+\sum_{n=1}^{k}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}\right)$，$(k\geqslant 1)$。显然

$$\tilde{y}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\\tilde{y}_1\\\tilde{y}_2\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1-\frac{1}{\beta}\\1-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{q_1}{p_1}\right)\\\vdots\end{pmatrix}$$

是（U）之解，所以$\tilde{y}$是（U）之最小解。故

$$\Pi=(\tilde{y}\ 0).$$

特别地，若$q_i\equiv q$，$p_i\equiv p$，则

（1）$p\leqslant\frac{1}{2}$时，$\beta=\infty$，$\Pi=(\mathbf{1}\ 0)$；

(2) $p>\frac{1}{2}$ 时，$\Pi=(\tilde{y}\ 0)$，

$$\tilde{y}=\begin{pmatrix}1\\ q/p\\ (q/p)^2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

例5.4. 更新过程，设$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},i,j\in E)$，$p_{i,0}=q_i$，$p_{i,i+1}=p_i$，$p_{i,j}=0\quad(j\neq 0$ 或 $i+1)$，$p_i>0$，$q_i>0$，$p_i+q_i=1\quad(i\in E)$。

显然P是不可约的。解左方程，发现：

(1) 当 $\delta=\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_0p_1\cdots p_i<\infty$时，左方程有非 0 解 $x'=(1,p_0,p_0p_1,\cdots)$，故 $\Pi=1\left(\frac{1}{x'1}\right)x'=\frac{1}{1+\delta}1x'$。

(2) 当$\delta=\infty$时，左方程只有 0 解，$\Pi=0$。

考虑$A=Pon(E-\{0\})$，解0右方程：

$$\langle\!\langle Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\rangle\!\rangle$$

发现：当 $\theta=\prod\limits_{i=0}^{\infty}p_i=0$ 时，0右方程只有0解，当$\theta>0$时，0右方程有非 0 解。所以：

$$\delta<\infty\Longrightarrow E=R_1^+;$$

$$\delta=\infty,\ \theta=0\Longrightarrow E=R_1^0;$$

$$\delta=\infty,\ \theta>0\Longrightarrow E=N.$$

直接计算可知：$\langle\!\langle Ay=y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\rangle\!\rangle$ 的最大解是 $a=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\end{pmatrix}$，

$a_i=p_ip_{i+1}\cdots$，$(i\geqslant 1)$，所以由命题4.8得 $f_{i,0}^*=1-a_i$，$(i\geqslant 1)$，从而$f_{0,0}^*=p_{0,0}+p_{0,1}f_{1,0}^*=q_0+p_0(1-a_1)=q_0+p_0(1-p_1p_2\cdots)$

$$=1-\prod_{i=0}^{\infty}p_i.$$

例5.5． 排队过程（一） 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$， $P=(p_{i,j}, i,j\in E)$ 是下列形状之转移阵：

$$P=\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$k_0>0,\ k_2+k_3+\cdots>0,\ \sum_{i=0}^{\infty}k_i=1.$$

显然P是不可约的。令 $K(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}k_i\lambda^i$，$(|\lambda|\leqslant 1)$， $X(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\lambda^i$，$x'=(x_0,x_1,\cdots)\in(l)$，$(|\lambda|\leqslant 1)$． 解左方程 《$x'P=x'$，$x'\geqslant 0, x'\in(l)$》 即等价于解母函数方程：

$$x'\Lambda=x'P\Lambda,\ x'\geqslant 0,\ x'\in(l),\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\end{pmatrix}.$$ 此即

$$X(\lambda)=x'\begin{pmatrix}K(\lambda)\\ K(\lambda)\\ \lambda K(\lambda)\\ \lambda^2K(\lambda)\\ \vdots\end{pmatrix},$$

化简之得：

$$X(\lambda)=x_0(1-\lambda)K(\lambda)/(K(\lambda)-\lambda),\quad |\lambda|<1.$$

若左方程有非0解，由上式得知 $x_0>0$，故由上式得

$$\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{K(\lambda)-\lambda}{1-\lambda}=\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{x_0K(\lambda)}{X(\lambda)}>0,$$

此即 $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}<1$。反之若 $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}<1$，易证左方程有非 0 解$x'$

使 $x'\Lambda=X(\lambda)=\dfrac{(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}$。

所以：

(1) 当 $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}\geqslant 1$，有$\Pi=0$；

(2) 当 $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}<1$， 有 $\Pi=1\pi'$， 若记 $\Pi(\lambda)=\pi'\Lambda$， 则

$\Pi(\lambda)=CX(\lambda)=\dfrac{C(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}$， 由 $\Pi(1)=\pi'1=1$ 得 $c=1-\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}$。

下面研究状态空间E的分类。

(1) $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}<1,\Longleftrightarrow E=R_1^+$。

(2) 若$\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}=1$，考虑

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots\\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots\\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix},$$

则有

$$\tilde{P}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix},$$

所以，由定理4.6知$\tilde{P}$是无耗损，再用定理4.15知P有常返状态，由于P不可约，再注意(1)，可知这时$E=R_1^0$。

(3) 若 $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK}{d\lambda}>1$，由$k_0>0$，$k_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=0}^{\infty}k_i=1$ 得知（参见［72］P.226（第一版））存在 $0<\alpha<1$，使 $K(\alpha)=\alpha$。令

$$y=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\\\vdots\end{pmatrix},$$ y是非常向量，且 $$Py=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha^2\\\alpha^3\\\vdots\end{pmatrix}\leqslant y,$$ 所以由定理4.13知

E不是一个常返类，而今P不可约，所以 $E=N$。

例5.6. 排队过程(二) 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$ 是下述形式的转移阵：

$$P=\begin{pmatrix}a_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ a_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots\\ a_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots\\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i=1,\qquad \alpha_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots,\qquad (i\geqslant 0),\qquad a_0>0,$$

$$a_2+a_3+\cdots>0.$$

显然，P是不可约的。令 $A(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\lambda^i$，$\rho=\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\frac{dA}{d\lambda}$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

引理5.1. 若 P 不可约，且存在 $x'=(x_i, i\in E)$，$x'\geqslant 0$，$\{x_i\}$ 有界，$\sum_{i\in E} x_i=\infty$，$x'P\leqslant x'$，则E无正状态。

证 由 $x'\geqslant x'P$，得 $x'\geqslant x'\left(\frac{1}{n}\sum_{\gamma=1}^{n} P^{(\gamma)}\right)$. 再用 $x'\geqslant 0$，$\{x_i\}$ 有界得：$x'\geqslant x'\Pi$. 若E有正状态，则由P不可约得 $\Pi=\mathbf{1}\pi'$ 行行一样，从而 $x'\geqslant x'\mathbf{1}\pi'=\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i\right)\pi'$，此为不可能。

用引理5.1来处理例5.6。

(1) 若 $\rho\leqslant 1$，记 $\mathbf{1}'=(1,1,\cdots)$ 是 $\mathbf{1}$ 之转置，有

$$\mathbf{1}'P=(\rho,1,1,\cdots)\leqslant \mathbf{1}'.$$

所以由引理5.1知P无正状态，故 $\Pi=0$.

(2) 若 $\rho>1$，则必存在 θ，$0<\theta<1$，$A(\theta)=\theta$，从而 $(1,\theta,\theta^2,\cdots)P=(1,\theta,\theta^2,\cdots)$，此即左方程有非0解，故 $E=R_1^+$，$\Pi=\mathbf{1}(1,\theta,\theta^2,\cdots)(1-\theta)$. 注意：由于 $\Pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\gamma=1}^{n} P^{(\gamma)}$ 唯一存在，故θ 也是唯一存在的。

考虑 $A=Pon(E-\{0\})$，解0右方程

$$《\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}\geqslant 0,\ y\in(m)》.$$

令 $\Lambda'=(1,\lambda,\lambda^2\cdots)$，$Y(\lambda)=\Lambda' y$，则 由$Ay=y$，$y\geqslant 0$，$y\in(m)$得：

$$Y(\lambda)=\Lambda' Ay=\Big(\frac{A(\lambda)-a_0}{\lambda},$$

$$A(\lambda),\ \lambda A(\lambda),\ \lambda^2 A(\lambda),\ \cdots\Big)y.$$

即 $$\lambda Y(\lambda)=A(\lambda)Y(\lambda)-a_0 y_0,$$

亦即 $$(1-\lambda)Y(\lambda)=\frac{a_0 y_0(1-\lambda)}{A(\lambda)-\lambda},$$ 所以

$$\sum_{i=0}^{\infty}(y_i-y_{i-1})\lambda^i=\frac{a_0 y_0}{(a_0-\alpha_1\lambda-\alpha_2\lambda^2-\cdots)},$$

（定义$y_{-1}=0$，$|\lambda|<1$）。

显然，0右方程之任一解y都满足 $y_{i+1}\geqslant y_i$，($i\geqslant 0$)。所以，若0右方程有非0解y，则$\lim\limits_{i\to\infty}y_i$ 存在且>0。故把上式对$\lambda\uparrow 1$取极限即得：

$$\frac{a_0 y_0}{a_0-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots)}=\lim_{\lambda\uparrow 1}\sum_{i=0}^{\infty}(y_i-y_{i-1})\lambda^i$$

$$=\lim_{i\to\infty}y_i$$

是有限正数。因此，若0右方程有非0解y，则必有 $a_0-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots)>0$，此即 $\rho<1$。所以，$\rho\geqslant 1$ 时，0右方程只有0解，从而E无滑过状态。前已证明 $\rho>1\Longrightarrow E=R_1^+$，所以 $\rho=1\Longrightarrow E=R_1^0$。当$\rho<1$时，可证：若 $Y(\lambda)=\dfrac{a_0 y_0}{A(\lambda)-\lambda}$，$Y(\lambda)=\Lambda' y$，则$y$是0右方程的非0解，所以，$\rho<1\Longrightarrow E=N$。总之

$$\rho>1\Longrightarrow E=R_1^+;$$

$$\rho=1\Longrightarrow E=R_1^0;$$

$$\rho<1\Longrightarrow E=N.$$

例5.7. 交换过程。设某容器内之质点，每隔一单位时间发生一次变化，已在其内之某质点可逃离此容器（其概率为q）也可留在其内(其概率为p)，不在其内之质点也可进入其内，进入的个数服从参数为λ的普哇松分布：$\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\geqslant 0\}$。假定各质点之出、入、留是相互独立的。若用$\xi_n$表时刻$n$此容器内之质点数，则$\{\xi_n, n\geqslant 0\}$是一个马尔可夫链，其转移阵$P=(p_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$如下：

$$\begin{aligned}p_{i,j}&=P(\xi_{n+1}=j\mid \xi_n=i)\\&=\sum_{m+r=j}c_m^i p^m q^{i-m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}\\&=\sum_{m=0}^{\min(i,j)}c_m^i p^m q^{i-m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}\end{aligned}$$

($p>0,\ q>0,\ p+q=1,\ \lambda>0,\ i,j\geqslant 0$)，此处$c_m^i$表$i$个元素取$m$的组合数。

显然 $p_{i,j}>0$，($i,j\geqslant 0$)，所以P是不可约无周期的。

解左方程《$x'P=x', x'\geqslant 0, x'\in(l)$》。令 $S=\begin{pmatrix}1\\s\\s^2\\\vdots\end{pmatrix}$，$X(s)=x'S$，$\varphi_i(s)=e^{\lambda(s-1)}(ps+q)^i\begin{pmatrix}i\geqslant 0,\\0<s<1\end{pmatrix}$。则$x'$是左方程之解的充要条件是：

$x'\geqslant 0,\ x'\in(l)$，

$$\begin{aligned}X(s)=x'PS&=x'\begin{pmatrix}\varphi_0(s)\\\varphi_1(s)\\\vdots\end{pmatrix}\\&=e^{\lambda(s-1)}\sum_{i=0}x_i(ps+q)^i\end{aligned}$$

$$=e^{\lambda(s-1)}X(ps+q).$$

若令 $Y(s)=e^{-\frac{\lambda s}{q}}X(s)$，则上式即是

$$Y(s)=Y(ps+q),\quad (0<s<1).$$

再令 $f(s)=ps+q$，$f^n(s)$ 为 f 的 n 重复合函数，则由上式得：

$$Y(s)=Y(f(s))=\cdots=Y(f^n(s)).$$

显然当 $0<s<1$ 时 $s\leqslant f(s)\leqslant\cdots\leqslant f^n(s)\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(s)=\sigma$ 存在，再由 $p\sigma+q=f(\sigma)=\sigma$ 及 $p+q=1$ 得 $\sigma=1$。所以 $Y(s)=\lim\limits_{n\to\infty}Y(f^n(s))=Y(1)=c$，即是 $X(s)=ce^{\frac{\lambda s}{q}}$。因此左方程有非 0 解，所以 $E=R_1^+$。且 $\Pi=1\pi'$，$\pi'=e^{-\frac{\lambda}{q}}x'$，

$x'S=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x_is^i=e^{\frac{\lambda s}{q}}$。亦即 $\pi'=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$，

$$\pi_i=e^{-\frac{\lambda}{q}}\cdot\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i\Big/i!,\quad (i\geqslant 0).$$

§6. 位势理论简介

在这一节中，如不声明，E、$P=(p_{ij},\ i,j\in E)$、$(\Omega^*,\ \mathscr{F}^*,\ P^i)$ 的意义如前，再设 V (V') 为定义在 E 上的全体实值的列(行)向量，$V_+=\{h: h\geqslant 0,\ h\in V\}$，$V'_+$ 意义类似。

在§4中，为了研究遍历性理论，我们曾研究过左方程«$x'P=x'$，$x'\geqslant 0$，$x'\in(l)$»及右方程«$Py=y$，$y\geqslant 0$，$y\in(m)$»。在这一节中，我们将把这类问题拓广，将研究所谓盈（谐）函数及盈（谐）测度问题。

定义6.1. 设 $P=(p_{ij},\ i,j\in E)$ 是准转移阵，$h\in V_+$，若 $Ph\leqslant h$，则称 h 是一个 P—盈函；特别地，若 $Ph=h$，则称 h 是谐函；更特别地，称 P—谐函 h 是 P—极端谐函，如果"$g\leqslant h$，g 是 P—谐函 $\Longrightarrow g=\lambda h$，$\lambda$ 是实数。"任取 $a'\in V'_+$，若 $a'p\leqslant a'$，则称 a' 是 P—

盈测；特别地，若$\alpha' P=\alpha'$，则称α'是P—谐测；更特别地，称 P—谐测α'是P—极端谐测，如果“$\beta' \leqslant \alpha'$，β' 是 P—谐测$\Longrightarrow \beta'=\lambda\alpha'$，$\lambda$是一个实数。”在不混淆的情况，简记P—盈函为盈函，其它类似。向量h（α'）对应于i的分量用$h(i)$（$\alpha'(i)$）表之。

注 有的著作中，称盈（谐）函为上调和（调和）函数，称盈（谐）测为过份（不变）测度。

定义6.2. 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，$(E, \mathscr{E})$是可测空间，X是由Ω到E的变换（记作$X: \Omega\to E$)，如果$A\in\mathscr{E}\Longrightarrow x^{-1}(A)\in\mathscr{F}$，则称X是$(E, \mathscr{E})$随机变量。任取$A\in\mathscr{E}$，令$\mu_X(A)=P(X\in A)$，则$\mu_X(\cdot)$是$\mathscr{E}$上的概率测度，称之为X的分布，记作$\mu_X=PX^{-1}$。若$E=\mathscr{R}$是实数空间，$\mathscr{E}$是$\mathscr{R}$中一切波勒尔集，则简称$(E, \mathscr{E})$随机变量为随机变量，这时称

$$E(X)=\int_\Omega XdP$$

为X的期望，若$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的一个子σ代数，用$E(X|\mathscr{G})$表X关于$\mathscr{G}$的条件期望，特别地，若$X=I_A$是A上的示性函数（$A\in\mathscr{F}$），即$I_A(\omega)=1$ 当$\omega\in A$，反之$I_A(\omega)=0$，则称$P(A|\mathscr{G})\equiv E(I_A|\mathscr{G})$为A关于$\mathscr{G}$的条件概率。

定义6.3. 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，$\boldsymbol{T}$是实数空间一个子集，$\{\mathscr{F}_t, t\in\boldsymbol{T}\}$是$\mathscr{F}$中的一族上升的子$\sigma$代数，即$\mathscr{F}_t$是$\sigma$代数，$\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$，$(t\in\boldsymbol{T})$且$t_1\leqslant t_2$，$t_1, t_2\in\boldsymbol{T}\Longrightarrow\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}$，$\{X_t, t\in\boldsymbol{T}\}$是一族随机变量，若

(i) X_t关于$\mathscr{F}_t$可测，$(t\in\boldsymbol{T})$；

(ii) $E(|X_t|)<\infty$，$(t\in\boldsymbol{T})$；

(iii) $E(X_s|\mathscr{F}_t)\leqslant X_t$，〔a.e〕$(P)$ $(s,t\in\boldsymbol{T}, s>t)$，

则称$\{X_t, \mathscr{F}_t, t\in\boldsymbol{T}\}$是一个上鞅，若$\{-X_t, \mathscr{F}_t, t\in\boldsymbol{T}\}$是上鞅，则称$\{X_t, \mathscr{F}_t, t\in\boldsymbol{T}\}$是半鞅，既是上鞅又是半鞅者称之为鞅。

命题6.1. 设P是转移阵，$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, X_n, \theta_n, P^i)$是P链。$\mathscr{F}_n=\sigma([{}^k_j], k\leqslant n, j\in E)$，$(n\geqslant 0)$，$h\geqslant 0$，$h\in(m)$。则$h$是盈

（谐）函的充要条件是：$\{h(X_n),\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant 0\}$ 关于 $(\Omega^*,\ \mathscr{F}^*,\ P^i)$ 是上鞅（鞅），$(i\in E)$。

证 设h是盈函，任取 $n>k\geqslant 0$，用（1.1）及$h\geqslant P^{(\nu)}h$，$(\nu\geqslant 0)$ 可得：$E^i(h(X_\nu))=\sum\limits_{j\in E}p_{ij}^{(\nu)}\ h(j)\leqslant h(i)<\infty$及

$$\int_{\bigcap\limits_{l=0}^{k}(x_l=i_l)} h(X_n)P^i(d\omega)=\sum_{j\in E}P^i\left(\begin{bmatrix}0,1,\cdots k,\ n\\ i_0,i_1,\cdots i_k,j\end{bmatrix}\right)h(j)$$

$$=P^i\left(\begin{bmatrix}0,1,\cdots,k\\ i_0,i_1,\cdots,i_k\end{bmatrix}\right)\sum_{j\in E}p_{i_k j}^{(n-k)}h(j)$$

$$\leqslant P^i\left(\begin{bmatrix}0,\cdots,k\\ i_0,\cdots i_k\end{bmatrix}\right)h(i_k)=\int_{\bigcap\limits_{l=0}^{k}(x_l=i_l)} h(X_k)P^i(d\omega),$$

故$E^i(h(X_n)\mid\mathscr{F}_k)\leqslant h(X_k)$，[$a,e$]，$(P^i)$（$E^i$表示对概率测度$P^i$的期望算子）。所以$\{h(X_n),\mathscr{F}_n,\ n\geqslant 0\}$是$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$上的上鞅。反之，若$\{h(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是$(\Omega^*,\ \mathscr{F}^*,\ P^i)$ 上的上鞅，$(i\in E)$，把$E^i(h(X_1)\mid\mathscr{F}_0)\leqslant h(X_0)$对$P^i$测度取期望得$Ph\leqslant h$，即$h$是盈函。

定义6.4. 设P是准转移阵，称$G\equiv\sum\limits_{n=0}^{\infty}P^n$为$P$的势核。若$h\in V_+$，$g\in V_+$，$h=Gg$，则称$h$ 是g的位势，是 P—势函，简称势函。类似地，若$\beta'\in V'_+$，$\alpha'\in V'_+$，$\beta'=\alpha' G$，则称 β'是α'的位势，是 P—势测，简称势测。（约定$\infty\cdot 0=0$）。

定理6.1.（分解定理）设 P为准转移阵，对任一盈函 f，恒存在唯一一对g，$h\in V_+$，h是谐函，且$f=Gg+h$。

证 由$Pf\leqslant f$知 $\{P^nf,n\geqslant 0\}$ 是非升函数（列向量）列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}P^nf=h\geqslant 0$存在。再用控制收敛定理知$Ph=P(\lim\limits_{n\to\infty}P^nf)=\lim\limits_{n\to\infty}P^{n+1}f=h$，故$h$是谐函。令$g=f-Pf\geqslant 0$，则

$$Gg=\left(\sum_{n=0}^{\infty}P^n\right)(f-Pf)=\sum_{n=0}^{\infty}P^n(f-Pf)=\lim_{k\to\infty}(f-P^{k+1}f)$$

$$=f-h.$$

若f还有另一分解$f=Gg^*+h^*$,h^*是谐函，Gg^*是势函，则$P^nGg+h=P^nGg^*+h^*,(n\geqslant 0)$，但是由$0\leqslant Gg<\infty$得$\lim\limits_{n\to\infty}P^nGg=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}P^kg=0$，($Gg^*$也一样)，所以$h=h^*$，从而$Gg=Gg^*$。把$I-P$左乘此式两边即得$g=g^*$。

系1. 设$g\in V_+$，$Gg\in V_+$，则Gg是普哇松方程

«$(I-P)f=g$，f是盈函»

的最小解。

证 显然Gg是解。若f是另一解，则由定理6.1有$f=G(f-Pf)+\lim\limits_{n\to\infty}P^nf=Gg+\lim\limits_{n\to\infty}P^nf$，$h=\lim\limits_{n\to\infty}P^nf\geqslant 0$，故$Gg$是最小解。

系2. (1) f是盈函，$g,Gg\in V_+,f\leqslant Gg\Longrightarrow f$是势函；

(2) f是谐函，$g,Gg\in V_+$，$f\leqslant Gg\Longrightarrow f=0$.

证 用定理6.1，为证系2只须证明（2）。设f是谐函且$f\leqslant Gg$，则$f=P^nf\leqslant P^nGg$，而定理6.1中已证$\lim\limits_{n\to\infty}P^nGg=0$，故$f=0$.

定理6.1′. 设P为准转移阵，任何盈测α'均可唯一地分解成$\alpha'=\beta'G+\gamma'$，其中$\beta'G$是势测，γ'是谐测。

证 任取$i\in E$，$\{\alpha'P^ne_i,\ n\geqslant 1\}$是非升序列，故可令$\gamma(i)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha'P^ne_i$。易证$\gamma'=(\gamma(i),\ i\in E)$是谐测。仿定理6.1可证定理6.1′.

定义6.5. 设P是转移阵，$E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\phi$。称E_2是P的（或者对应的P链的）必离集，如

$$P^i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\E_2\end{bmatrix}\right)=0,\ (i\in E),\quad (6.1)$$

在不会混淆的情况下，简称E_2是必离集。

命题6.2. 设 P 是转移阵，令$E_2 \subset E$，$P_2 = P on E_2$，$g_m(i) = P^i\left(\bigcap_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} n \\ E_2 \end{bmatrix}\right)$，$g_m = \begin{pmatrix} g_m(i) \\ i \in E_2 \end{pmatrix}$，则下列陈述等价：

(1) E_2是必离集；

(2) $\lim\limits_{m\to\infty} g_m = 0$；

(3) $\lim\limits_{m\to\infty} P_2^m \mathbf{1} = 0$；($P_2^m$表$P_2$的$m$次幂)

(4) 《$P_2 g = g$，$0 \leqslant g \leqslant 1$》只有0解。

证 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 显然成立。

(2)$\Longrightarrow$(3) 用 (1.1) 有$P_2^m \mathbf{1} = g_m$，故(2)$\Longrightarrow$(3)。

(3)$\Longrightarrow$(4) 只须注意《$P_2 g = g$，$0 \leqslant g \leqslant 1$》的任一解均满足 $g = \lim\limits_{m\to\infty} P_2^m g \leqslant \limsup\limits_{m\to\infty} P_2^m \mathbf{1}$。

(4)$\Longrightarrow$(2) 由于$P_2 g_m = g_{m+1}$，$0 \leqslant g_m \leqslant 1$，$g = \lim\limits_{m\to\infty} g_m$是《$P_2 g = g$，$0 \leqslant g \leqslant 1$》之解，故(4)$\Longrightarrow$(2)。

命题6.3. 设P是转移阵，则下列陈述等价：

(1) 1是极端谐函；

(2) 《$Ph = h$，$0 \leqslant h \leqslant 1$》只有常数解。

证 由定义立得。

设$H \subset E$，令

$$ {}_H p_{i,j}^{(n)} = P^i\left(\bigcap_{\gamma=1}^{n-1}\begin{bmatrix} \gamma \\ \overline{H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right), \quad \begin{matrix} (n \geqslant 1) \\ (i, j \in E). \end{matrix} \tag{6.2} $$

$$ {}_H p_{i,j}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H p_{i,j}^{(n)} \tag{6.3} $$

定理6.2. 设P是转移阵，$E = E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2 = \phi$，E_2是必离集，若

$$ 《f(i) = \sum_{j \in E_1} {}_{E_1} p_{i,j}^{*} f(j), \quad 0 \leqslant f(i) \leqslant 1, i \in E_1》 \tag{6.4} $$

只有常数解，则

$$《Ph=h,\ 0\leqslant h\leqslant 1》 \tag{6.5}$$

亦然。

证 注意：由于E_2是必离集，故任取$i\in E_1$，

$$\sum_{j\in E_1} {}_{E_1}p^*_{i,j} = P^i\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big[\begin{matrix} n \\ E_1 \end{matrix}\Big]\Big) = 1 - P^i\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[\begin{matrix} n \\ E_2 \end{matrix}\Big]\Big) = 1,$$

即$({}_{E_1}p^*_{i,j},\ i,j\in E_1)$是转移阵，故 $c\mathbf{1}$ $(0\leqslant c\leqslant 1)$是(6.4)和(6.5)的解，设$h$是(6.5)的解，往证：$h=c\mathbf{1}$。令

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} \end{matrix}, \qquad h = \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

即是$P_{s,t}=(p_{i,j},\ i\in E_s,\ j\in E_t),(s,t=1,2),f=h\ on\ E_1,g=h\ on\ E_2$，则可证：

(1) $g=H_2P_{2,1}f$，其中$H_2=\sum_{n=0}^{\infty}P^n_{2,2}$；

(2) f是(6.4)的解。

事实上，由

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad 0\leqslant \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\leqslant \mathbf{1}$$

得知g是$P_{2,2}$—盈函，故由定理6.1得：

$$g=g_1+g_2,\ g_1=P_{2,2}g_1,\ 0\leqslant g_1\leqslant 1,\ g_2=H_2v.$$

由于E_2是必离集，所以由命题6.2有

$$g_1=\lim_{m\to\infty} P^m_{2,2}\, g_1 = 0.$$

因此，$g=H_2v$。以此代入$P_{2,1}f+P_{2,2}g=g$得

$$H_2v=P_{2,1}f+P_{2,2}H_2v=P_{2,1}f+(H_2-I)v.$$

所以$v=P_{2,1}f$，即是$g=H_2P_{2,1}f$。(1)证毕。

再证(2)。令$\mathscr{F}_n=\sigma\{\Big[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix}\Big],\ k\leqslant n,\ j\in E\}$，$(n\geqslant 0)$，由命题

6.1知：$\{h(X_n),\mathscr{T}_n,\ n\geqslant 0\}$是（$\Omega^*$，$\mathscr{T}^*$，$P^i$）上的鞅，（$i\in E$，$X_n$是$\Omega^*$上的坐标函数）。令$\tau(\omega)=\inf\{n;\ X_n(\omega)\in E_1,\ n\geqslant 1\}$，（空集的$\inf$定义为$+\infty$），则由$E_2$是必离集可知

$$P^i(\tau<\infty)=1,\ (i\in E), \tag{6.6}$$

显然，

$$\begin{aligned} & P^i(X_0=i)=P^i(X_\tau\in E_1)=P^i(f(X_0)=h(X_0)) \\ & =P^i(f(X_\tau)=h(X_\tau))=1,\ (i\in E_1), \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\{\tau\leqslant n\}\in\mathscr{T}_n,\quad (n\geqslant 0), \tag{6.8}$$

再利用$\{h(X_n),\ \mathscr{T}_n,\ n\geqslant 0\}$是鞅可知，对$i\in E_1$有

$$\begin{aligned} f(i) &= E^i(h(X_0))=\int_{\{\tau=0\}} h(X_\tau)P^i(d\omega)+\int_{\{\tau>0\}} h(X_0)P^i(d\omega) \\ &= \int_{\{\tau=0\}} h(X_\tau)P^i(d\omega)+\int_{\{\tau>0\}} h(X_1)P^i(d\omega) \\ &= \int_{\{0\leqslant\tau\leqslant 1\}} h(X_\tau)P^i(d\omega)+\int_{\{\tau>1\}} h(X_1)P^i(d\omega) \\ &= \cdots = \int_{\{0\leqslant\tau\leqslant k\}} h(X_\tau)P^i(d\omega)+\int_{\{\tau>k\}} h(X_k)P^i(d\omega). \end{aligned} \tag{6.9}$$

由$0\leqslant h\leqslant 1$及（6.6）对（6.9）取极限（$k\to\infty$）得：

$$\begin{aligned} f(i) &= E^i(h(X_\tau))=\sum_{j\in E_1} h(j)P^i(X_\tau=j) \\ &= \sum_{j\in E_1} h(j)\sum_{n=1}^{\infty} P^i\Big(\bigcap_{v=1}^{n-1}\{X_v\ \bar{\in} E_1\}\{X_n=j\}\Big) \\ &= \sum_{j\in E_1} f(j)\ {}_{E_1}p_{i,j}^{*}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

此即f是（6.4）的解。（2）得证。由定理假设得：$f=c\mathbf{1}$，（$0\leqslant c\leqslant 1$），所以

$$h=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c\mathbf{1} \\ H_2\ P_{2,1}\ c\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

为证定理，只须证$H_2P_{2,1}\mathbf{1}=\mathbf{1}$。事实上，由$P$是转移阵知：

$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$，（$\mathbf{1}_i$ 是定义在 E_i 上分量皆为1的列向量），更有

$$\mathbf{1}_2 = P_{2,1}\mathbf{1}_1 + P_{2,2}\mathbf{1}_2 = P_{2,1}\mathbf{1}_1 + P_{2,2}P_{2,1}\mathbf{1}_1 + P^2_{2,2}\mathbf{1}_2$$

$$= \cdots = \Big(\sum_{n=0}^{k-1} P^m_{2,2}\Big)P_{2,1}\mathbf{1}_1 + P^k_{2,2}\mathbf{1}_2. \qquad (6.11)$$

由E_2是必离集，用命题6.2得：

$$\lim_{k\leftarrow\infty} P^k_{2,2}\mathbf{1}_2 = 0.$$

因此，在（6.11）中对$k\to\infty$取极限得：

$$H_2P_{2,1}\mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_2.$$

定理证毕。

定理6.3. 转移阵P的状态空间 E 由一个常返类所构成的充要条件是：全体盈函为$c\mathbf{1}$（$0\leqslant c$），自然，这时全体谐函也是这些。

这是定理4.13的复述。

定理6.4. 表转移阵P 的状态空间 $E=N\cup R=N\cup(\bigcup_n R_n)$，（$N$ 是全体滑过状态，R 是全体常返状态，$\{R_n\}$ 是全体不交的常返类），从而由定理3.2有：

$$P = \begin{array}{c} \\ N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N & R_1 & R_2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \qquad (6.17)$$

这时全部盈函为一切下述形式的h：

$$\begin{cases} h = \begin{array}{c} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{array}\begin{pmatrix} f \\ b_1\mathbf{1} \\ b_2\mathbf{1} \\ \vdots \end{pmatrix}, & (f\geqslant 0,\ b_n\text{是非负实数}), \qquad (6.18) \\ P_{0,0}f + \sum_n b_nP_{0,n}\mathbf{1} \leqslant f, & \qquad (6.19) \end{cases}$$

把（6.19）中的不等号换成等号，即得全体谐函。

证 显然任给一个满足（6.18）、（6.19）的h，都是盈函，今任取一个盈函

$$h=\begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix}\begin{pmatrix} f \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

必有

$$\begin{pmatrix} P_{0,0}f+\sum_n P_{0,n}h_n \\ P_1h_1 \\ P_2h_2 \\ \vdots \end{pmatrix}=Ph\leqslant h=\begin{pmatrix} f \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad (6.20)$$

更有

$$\begin{cases} P_{0,0}f+\sum_n P_{0,n}h_n\leqslant f,\ (f\geqslant 0,\ h_n\geqslant 0), & (6.21) \\ P_nh_n\leqslant h_n, \qquad (h_n\geqslant 0), & (6.22) \end{cases}$$

由（6.22）知h_n是P_n—盈函，而P_n的状态空间由一个常返类所构成，因此由定理6.3知$h_n=b_n\mathbf{1}$（b_n是非负实数）。

定理6.5. 设P是转移阵，$E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\phi$，E_2是必离集，E_1是某个常返类中的一部份，且存在正整数d，使$P^i(\tau=d)=1(i\in E_1)$，（$\{X_n\}$、τ的定义见定理6.2）则《$Ph=h$，$0\leqslant h\leqslant\mathbf{1}$》以且仅以$c\mathbf{1}$为其解。

注： 若E_1是一个常返类或是某个周期为d的常返类中的一个循环子类，则本定理中关于τ之条件成立。

证 令$\tilde{P}=P^d\sigma nE_1$，由$\sum_{j\in E_1}p_{i,j}^{(d)}=\sum_{j\in E_1}p^i(X_d=j)=p^i(X_\tau\in E_1)=1$（$i\in E_1$）知$\tilde{P}$是转移阵。由$E_1$是某个常返类中一部分及$P^i(\tau=d)=1$（$i\in E_1$）知：当$i,j\in E_1$有$\sum_{n=1}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}=\infty$，$p_{i,j}^{(n)}=0$（$n\neq$

$0(\text{mod}d)$)，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{i,j}^{(kd)}=\infty$，$(i,j\in E_1)$，$\tilde{P}^k=(p_{i,j}^{(kd)},i,j\in E_1)$，此即$\tilde{P}$的状态空间$E_1$由一个常返类构成。用定理6.3知«$\tilde{P}f=f$，$0\leqslant f\leqslant 1$»的全体解是$c\mathbf{1}$，$(0\leqslant c\leqslant 1)$。但$p_{i,j}^{(d)}=p^i(X_d=j)={}_{E_1}p_{i,j}^*$，$(i,j\in E_1)$，所以«$\tilde{P}f=f$，$0\leqslant f\leqslant 1$»即是(6.4)。用定理6.2即得定理6.5。

定理6.6. 设转移阵P有常返状态，则«$Ph=h$，$0\leqslant h\leqslant 1$»以且仅以$c\mathbf{1}(0\leqslant c\leqslant 1)$为其解的充要条件是$E=N\cup R_1$，其中$N$是全体滑过状态(可以是空集)，$N$构成必离集，$R_1$由一个常返类构成。

证 充分性．若$N=\varnothing$，则由定理6.3知«$Ph=h$，$0\leqslant h\leqslant 1$»以且仅以$c\mathbf{1}$为其解，$(0\leqslant c\leqslant 1)$。若$N\neq\varnothing$，$N$是必离集，$R_1$由一个常返类构成，则用定理6.5亦得同样结论。

必要性．设«$Ph=h$，$0\leqslant h\leqslant 1$»以且仅以$c\mathbf{1}$为其解$(0\leqslant c\leqslant 1)$。由定理6.4知$E_1$恰含一个常返类$R_1$(因定理假设有常返状态)。谬设$N$非必离集，则由命题6.2得«$P_{0,0}f=f$，$0\leqslant f\leqslant 1$»有非0解$f^*$($P_{0,0}$的定义见(6.17))，从而用定理6.4知«$Ph=h,0\leqslant h\leqslant 1$»有非常函数解

$$h=\begin{matrix}N\\R_1\end{matrix}\begin{pmatrix}f^*\\0\end{pmatrix}.$$

矛盾，故N是必离集。

§7．转移阵的可逆性

定义7.1. 设E为一可数集，$P=(p_{i,j},i,j\in E)$是E上的一个准转移阵。如果存在一个E上的行向是$\mu'=(\mu_i,\ i\in E)$，满足$\mu'\geqslant 0$，$\mu'\neq 0$，$\mu'\mathbf{1}<\infty$，

$$\mu_i p_{i,j}=\mu_j p_{j,i},\quad (i,j\in E),\tag{7.1}$$

则说P是可逆的，(若P为可逆的转移阵，亦说P链或以P为转移阵的马尔可夫链是可逆的)。这时μ'称为P的一个伴随行向量，P称

为关于μ'是可逆的。

定理7.1. 设P是E上的一个转移阵，$\mu'=(\mu_i,\ i\in E)$是E上的一个行向量，$\mu'\geqslant 0$，$\mu'\neq 0$，$\mu'\mathbf{1}<\infty$，则下列陈述等价：

(1) P关于μ'是可逆的；

(2) P^n关于μ'是可逆的(对一切$n\geqslant 0$)；

(3) 对E上的列向量 $f=\binom{f_i}{i\in E}$，$g=\binom{g_i}{i\in E}$，只要$f\geqslant 0, g\geqslant 0$(或者$\sup\limits_{i\in E}|f_i|<\infty$，$\sup\limits_{i\in E}|g_i|<\infty$)，就有

$$\sum_{i\in E}\mu_i f_i\sum_{j\in E}p_{i,j}g_j=\sum_{i\in E}\mu_i g_i\sum_{j\in E}p_{i,j}f_j, \tag{7.2}$$

(4) 对满足(3)中条件的f, g，及满足$m+n=s+t$的非负整数m，n，s，t，有

$$\sum_{i\in E}\mu_i\Big(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(n)}f_j\Big)\Big(\sum_{k\in E}p_{i,k}^{(m)}g_k\Big)$$

$$=\sum_{i\in E}\mu_i\Big(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(s)}f_j\Big)\Big(\sum_{k\in E}p_{i,k}^{(t)}g_k\Big). \tag{7.3}$$

证 (1)⇒(2) 由于I和P关于μ'是可逆的。对n作归纳法。设P^m关于μ'是可逆，($m\leqslant n$)则

$$\mu_i p_{i,j}^{(n+1)}=\mu_i\sum_{k\in E}p_{i,k}p_{k,j}^{(n)}$$

$$=\sum_{k\in E}\mu_k p_{k,i}p_{k,j}^{(n)}$$

$$=\sum_{k\in E}p_{k,i}\mu_j p_{j,k}^{(n)}=\mu_j p_{j,i}^{(n+1)}.$$

归纳法完成。故(1)⇒(2)。

(2)⇒(3)。设(2)成立，则

$$\sum_{i\in E}\mu_i f_i\sum_{j\in E}p_{i,j}g_j=\sum_{j\in E}g_j\sum_{i\in E}f_i\mu_j p_{j,i}$$

$$=\sum_{j\in E}\mu_j g_j\sum_{i\in E}p_{j,i}f_i=\sum_{i\in E}\mu_i g_i\sum_{j\in E}p_{i,j}f_j.$$

(3)⇒(4)。由于(3)⇒(1)乃属显然，再用(1)⇒(2)，若(3)

成立，则$P^m(m\geqslant 0)$关于μ'是可逆的。再对P^m用(1)⇒(3)有：

$$\sum_{i\in E}\mu_i(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(n)}f_j)(\sum_{h\in E}p_{i,h}^{(m)}g_h)$$

$$=\sum_{i\in E}\mu_i g_i\sum_{i\in E}p_{i,j}^{(m)}(\sum_{h\in E}p_{j,h}^{(n)}f_h)$$

$$=\sum_{i\in E}\mu_i g_i\sum_{h\in E}p_{i,h}^{(m+n)}f_h.$$

此即(4)成立。

(4)⇒(1)。显然。

定理7.2. 若准转移阵P关于μ'是可逆的，则μ'是(l)中的非0的P—盈测，特别地，若P是转移阵，则μ'是(l)中的非0的P—谐测。

证 令$\mu'=(\mu_i,\ i\in E)$，则

$$\mu_i\geqslant\mu_i\sum_{j\in E}p_{i,j}=\sum_{j\in E}\mu_j p_{j,i},\quad(i\in E).$$

此即μ'是P—盈测。特别地，若P是转移阵，则上式中之“$\geqslant$”应为“$=$”，此即μ'是P—谐测。

定理7.3. 若准转移阵P关于μ'是可逆的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}P^n=\tilde{P}$，则

(1) $\tilde{P}$关于μ'是可逆的；

(2) 对一切非负整数m，n及一切有界列向量f和g，有

$$\sum_{i\in E}\mu_i(\sum_{j\in E}\tilde{p}_{i,j}f_j)(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(m)}g_j-\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(n)}g_j)=0,\tag{7.4}$$

其中$P^n=(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)$，$\tilde{P}=(\tilde{p}_{i,j},\ i,j\in E)$。

证 (1) 由定义立即可得。

(2) 由定理7.1(4)得：

$$\sum_{i\in E}\mu_i(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(t-m)}f_j)(\sum_{j\in E}p_{i,j}^{(m)}g_j)$$

$$= \sum_{i\in E}\mu_i\Big(\sum_{j\in E} p_{i,j}^{(t-n)} f_j\Big)\Big(\sum_{j\in E} p_{i,j}^{(n)} g_j\Big).$$

令$t\to\infty$，并用控制收敛定理即得(2)。

定理7.4. 设$P_1,\cdots,P_m$皆为E上之准转移阵，且皆关于μ'是可逆的，若

$$P_1P_2\cdots P_m = P_mP_{m-1}\cdots P_1,$$

则$P_1P_2\cdots P_m$关于μ'是可逆的。

证 令 $P_t=(p_{i,j}^{[t]},\ i,j\in E)$,

反复利用可逆性的定义可得：

$$\mu_i \sum_{j_1\in E}\cdot\sum_{j_2\in E}\cdots\sum_{j_{m-1}\in E} p_{i,j_1}^{[1]}p_{j_1,j_2}^{[2]}\cdots p_{j_{m-1},j}^{[m]}$$

$$= \sum_{j_1\in E}\sum_{j_2\in E}\cdots\sum_{j_{m-1}\in E} \mu_{j_1}p_{j_1,i}^{[1]}p_{j_1,j_2}^{[2]}\cdots p_{j_{m-1},j}^{[m]}$$

$$=\cdots=\sum_{j_1\in E}\sum_{j_2\in E}\cdots\sum_{j_{m-1}\in E} p_{j_1,i}^{[1]}p_{j_2,j_1}^{[2]}\cdots p_{j_{m-1},j_{m-2}}^{[m-1]}\cdot p_{j,j_{m-1}}^{[m]}\mu_j$$

$$= \sum_{j_{m-1}\in E}\sum_{j_{m-2}\in E}\cdots\sum_{j_1\in E} p_{j,j_{m-1}}^{[m]}p_{j_{m-1},j_{m-2}}^{[m-1]}\cdots p_{j_1,i}^{[1]}\mu_j$$

$$= \sum_{j_1\in E}\sum_{j_2\in E}\cdots\sum_{j_{m-1}\in E} p_{j,j_1}^{[1]}p_{j_1,j_2}^{[2]}\cdots p_{j_{m-1},i}^{[m]}\mu_j.$$

此即$P_1P_2\cdots P_m$关于μ'是可逆的。

定理7.5. 设$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是一个转移阵。

(1) 若E没有正状态，则每一个P—诺测 μ'皆恒等于O，且P是不可逆的；

(2) 若E恰有一个正类R_1^+，($N\cup R^0$可以非空)，则P是可逆的充要条件是

$$\pi'(1)e_ip_{i,j}=\pi'(1)e_jp_{j,i},\quad (i,j\in R_1^+),$$

其中$\pi'(1)$如定理4.5中所定义，e_i是E上之列向量，对应于i的元素为1其它元素为0。

(3) 若$E=R_1^+$，则P是可逆的充要条件是

$$\Pi e_i p_{i,j}=\Pi e_j p_{j,i}, \quad (i,j\in E),$$

其中 $\Pi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}P^{\nu}$。

(4) 一般地，P是可逆的充要条件是：存在正实数s_n，$\sum\limits_{n}s_n<\infty$，使

$$x'(s_1, \cdots, s_n\cdots)e_i p_{i,j}=x'(s_1,\cdots, s_n\cdots)e_j p_{j,i}, \quad (i,j\in E), \tag{7.5}$$

其中

$$x'(s_1, \cdots, s_n\cdots)=(\overset{N}{0}, \overset{R^0}{0}, \overset{R_1^+}{s_1\pi'(1)}, \overset{R_2^+}{s_2\pi'(2)}, \cdots)$$
是E上的非0行向量。

证 (1) 由(4.11)立即可得。

(2) 由定理7.2，P 的每一个伴随测度μ'都是(l)中的非0的P—谐测(不变测度)。因为E恰有一个正类R_1^+，由(4.11)，

$$\langle\!\langle \mu' p=\mu', \ \mu'\in(l), \ \mu'\geqslant 0\rangle\!\rangle$$

的通解即(l)中的全部P—谐测为：

$$\mu'=(\overset{N}{0}, \overset{R^0}{0}, \overset{R_1^+}{s_1\pi'(1)}), \quad \infty>s_1\geqslant 0. \tag{7.6}$$

若P是可逆的，则有伴随测度μ'，μ'必如(7.6)形式，且 $s_1>0$,

$$(0, 0, s_1\pi'(1))e_i p_{i,j}=(0, 0, s_1\pi'(1))e_j p_{j,i}, \quad (i,j\in E),$$

特别地，取$i,j\in R_1^+$有

$$\pi'(1)e_i p_{i,j}=\pi'(1)e_j p_{j,i} \quad i,j\in R_1^+.$$

反之，若上式成立，取

$$\mu'=(\overset{N}{0}, \overset{R^0}{0}, \overset{R_1^+}{\pi'(1)}),$$

则

$$\mu' e_i p_{i,j}=\mu' e_j p_{j,i}, \quad i,j\in R_1^+$$

而i,j中至少有一个不属于R_1^+时，不妨令$i\in N\cup R^0$，则

$$\mu' e_i p_{i,j}=0\cdot p_{i,j}=0,$$

若$j\in N\cup R^0$，则有$\mu' e_j=0$，

若$j\in R_1^+$，则有$p_{j,i}=0$，总之$\mu' e_j p_{j,i}=0$。这就证明i,j中至少有一个不属于R_1^+时亦有　$\mu' e_i p_{i,j}=\mu' e_j p_{j,i}$。

所以

$$\mu' e_i p_{i,j}=\mu' e_j p_{j,i}, \qquad (i,j\in E).$$

此即P关于μ'是可逆的。

(3) 由(2)及定理4.5立即可得 (3)。

(4) 若P是可逆的，由(1)知E中必有正状态，又因为全体(l)中的非0的P—谱测必为：

$$x'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots)=(\overset{N}{0},\ \overset{R^0}{0},\ \overset{R_1^+}{s_1\pi'(1)},\ \overset{R_2^+}{s_2\pi'(2)},\ \cdots),$$

$s_n\geqslant 0$，$0<\sum\limits_n s_n<\infty$.每一个伴随测度又必为$(l)$中的非0的$P$—谱测，所以，由$P$的可逆性得知：必存在一个$x'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\cdots)$

$=(\overset{N}{0},\ \overset{R^0}{0},\ \overset{R_1^+}{s_1\pi'(1)},\ \overset{R_2^+}{s_2\pi'(2)},\ \cdots)$，使

$$x'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots)e_i p_{i,j}=x'(s_1,s_2,\cdots,\ s_n,\ \cdots)e_j p_{j,i},$$

对一切$i,\ j\in E$成立，此即(7.5)成立。反之，若(7.5)成立，取$\mu'=x'(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots)$即为$P$的一个伴随测度，故$P$是可逆的。

下面我们看几个例子。

例7.1. 考虑例5.1中的自由随机徘徊。即是$E=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$，$p_{i,i-1}=g_i$，$p_{i,i+1}=p_i, p_i>0$，$g_i>0$，$p_i+g_i=1$，$(i\in E)$，$p_{i,j}=0$(当$|j-i|\neq 1$)。令

$$\delta=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{g_1g_2\cdots g_i}+\frac{g_0g_{-1}\cdots g_{-i+1}}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}}\right),$$

$$\theta_1=\left(1+\frac{g_1}{p_1}+\cdots+\frac{g_1\cdots g_i}{p_1\cdots p_i}\right),$$

$$\theta_2=\left(1+\frac{p_{-1}}{g_{-1}}+\cdots+\frac{p_{-1}\cdots p_{-i}}{g_{-1}\cdots g_{-i}}\right),$$

在例5.1中已证：

(1) $\delta=\infty \Longrightarrow \Pi=0$；

(2) $\delta<\infty \Longleftrightarrow E=R_1^+$；

(3) $\delta<\infty \Longrightarrow \Pi=\frac{1}{\pi' 1}\ 1\pi'$，

其中 $\pi'=(\pi_i, i\in E)$是一行向量，$\pi_0=1, \pi_i=p_0p_1\cdots p_{i-1}/g_1g_2\cdots g_i$，$(i>0)$，$\pi_{-i}=g_0g_{-1}\cdots g_{-i+1}/p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}$，$(i>0)$；

(4) $\delta=\theta_1=\theta_2=\infty \Longleftrightarrow E=R_1^0$；

(5) θ_1，θ_2中至少有一个有限$\Longleftrightarrow E=N$。应用定理7.5，我们有：

(6) $\delta=\infty \Longleftrightarrow \Pi=0 \Longrightarrow P$是不可逆的；

(7) $\delta<\infty$，P是可逆的充要条件是

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_j p_{j,i},\quad i,j\in E=R_1^+. \tag{7.7}$$

但是，当$|j-i|\neq 1$时 $p_{i,j}=p_{j,i}=0$，所以(7.7)对$|j-i|\neq 1$总成立。但当$|j-i|=1$时，经过简单计算发现(7.7)亦成立。所以，当$\delta<\infty$时，P是可逆的。

例7.2. 考虑例5.2中的在0处有反射屏的随机徘徊。即是$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$，$p_{0,0}=a_0$，$p_{0,1}=b_0$，$p_{0,j}=0, (j>1)$，$p_{i,i-1}=a_i$，$p_{i,i+1}=b_i$，$p_{i,j}=0, (|i-j|\neq 1)$，$a_i>0$，$(i\geqslant 1)$，$b_i>0$，$a_i+b_i=1$，$(i\in E)$。令

$$\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_nb_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1}a_n\cdots a_1},\quad \theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n},$$

经过计算可得：

(1) $\delta<\infty \Longleftrightarrow E=R_1^+ \Longleftrightarrow P$是可逆的；

(2) $\delta=\infty$，$\theta=\infty \Longleftrightarrow E=R_1^0 \Longrightarrow P$是不可逆的；

(3) $\theta<\infty \Longleftrightarrow E=N \Longrightarrow P$是不可逆的。

例7.3. 考虑例5.3中在0处具有吸收屏的随机徘徊，即是E

$=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$P=(p_{i,j}, i, j\in E)$，$p_{0,0}=1, p_{0,j}=0$，$(j\geq 1)$，$p_{i,i-1}=g_i$，$p_{i,i+1}=p_i$，$p_{i,j}=0$ $(|i-j|\neq 1$且$i\geq 1)$，$p_i+g_i=1$，$p_i>0$，$g_i>0$，$(i\geq 1)$。令

$$\beta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_1\cdots g_n}{p_1\cdots p_n},$$

例5.3中已证：

(1) $E=N\cup R_1^+$，$N=\{1, 2, \cdots\}$，$R_1^+=\{0\}$；

(2) $\beta=\infty\Longrightarrow \Pi=\begin{matrix} R_1^+ & N \\ (1 & 0) \end{matrix}$；

(3) $\beta<\infty\Longrightarrow \Pi=\begin{matrix} R_1^+ & N \\ (\tilde{y} & 0) \end{matrix}$，其中

$$\tilde{y}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1-\frac{1}{\beta}\\ 1-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{g_1}{p_1}\right)\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

应用定理7.5，可证P是可逆的充要条件是：

$$\pi'(1)e_ip_{i,j}=\pi'(1)e_jp_{j,i},\quad i,j\in R_1^+.$$

而今$R_1^+=\{0\}$，$\pi'(1)=1$，$p_{0,0}=1$。所以P是可逆的。

例7.4. 考虑例5.4中的更新过程。即是$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$P=(p_{i,j}, i, j\in E)$，$p_{i,0}=g_i$，$p_{i,i+1}=p_i, p_{i,j}=0$ $(j\neq 0$或$j\neq i+1)$，$p_i>0$，$g_i>0$，$p_i+g_i=1$，$(i\in E)$。令

$$\delta=\sum_{n=0}^{\infty}p_0p_1\cdots p_n,\quad \theta=\prod_{n=0}^{\infty}p_n,$$

例5.4中已经证明：

(1) $\delta<\infty\Longleftrightarrow E=R_1^+\Longleftrightarrow \Pi=\frac{1}{\pi'\mathbf{1}}\mathbf{1}\pi'$，

其中$\pi'=(\pi_0, \pi_1\cdots)$，$\pi_0=1$，$\pi_n=p_0p_1\cdots p_{n-1}$，$(n\geq 1)$；

(2) $\delta=\infty$, $\theta=0 \Longleftrightarrow E=R_1^0 \Longrightarrow \Pi=0$;

(3) $\delta=\infty$, $\theta>0 \Longleftrightarrow E=N \Longrightarrow \Pi=0$.

当$\delta<\infty$时，P是可逆的充要条件是

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_j p_{j,i}, \quad (i,j\in E).$$

但是

$$\pi_0 p_{0,1}=p_0 \neq p_0 g_1=\pi_1 p_{1,0},$$

所以此时P是不可逆的。而当$\delta=\infty$时，E无正状态，这时P亦为不可逆的。总之，P恒为不可逆。

例7.5. 考虑例5.7的交换过程。即是$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$，

$$p_{i,j}=\sum_{m=0}^{\min(i,j)} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!},$$

$\lambda>0$，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$，C_m^i是i个元素中取m个的组合数。

例5.7中已经证明：

(1) $E=R_1^+$，$\Pi=1\pi'$，$\pi'=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$，

$$\pi_i=e^{-\frac{\lambda}{q}}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i}{i!}(i\geqslant 0).$$

因此，P是可逆的充要条件是

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_j p_{j,i}, \quad (i,j\geqslant 0).$$

但是

$$\pi_i p_{i,j}=e^{-\frac{\lambda}{q}}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i}{i!}\cdot\sum_{m=0}^{\min(i,j)} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}$$

$$=e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{q}\right)}\sum_{m=0}^{\min(i,j)}\lambda^{i+j-m} C_m^i \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^m}{(j-m)!\,i!}$$

$$=e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{q}\right)}\sum_{m=0}^{\min(i,j)}\lambda^{i+j-m}\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^m}{m!\,(i-m)!\,(j-m)!}$$

关于i，j是对称的，所以

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_j p_{j,i}(i,j\in E).$$

因此P是可逆的。

例7.6. 考虑例5.5中的排队过程(一)，即是$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$，

$$P=\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$k_0>0,\ k_2+k_3+\cdots>0,\ \sum_{i=0}^{\infty}k_i=1,$$

$$K(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}k_i\lambda^i,\ (|\lambda|\leqslant 1).$$

例5.5已证：

(1) $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\dfrac{dK(\lambda)}{d\lambda}<1\Longleftrightarrow E=R_1^+$；

(2) $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\dfrac{dK(\lambda)}{d\lambda}=1\Longleftrightarrow E=R_1^0\Longrightarrow P$不可逆；

(3) $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\dfrac{dK(\lambda)}{d\lambda}>1\Longleftrightarrow E=N\Longrightarrow P$不可逆。

在情况(1)下，

$$\Pi=1\pi',\ \pi'=(\pi_0,\ \pi_1,\ \cdots),$$

$$\Pi(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\lambda^i,\ (|\lambda|\leqslant 1),$$

$$\Pi(\lambda)=\frac{c(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda},\ (|\lambda|<1),$$

$$c=1-\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{dK(\lambda)}{d\lambda}>0.$$

因为$k_2+k_3+\cdots>0$，所以存在一个$k_j>0$，$(j\geqslant 2)$，

因此 $\pi_0 p_{0,j}=ck_j>0$，

但是$\pi_j p_{j,0}=0$。所以在情况(1)下，P是不可逆的。总之，P恒为不可逆。

§8. 马尔可夫链的泛函的极限分布

在这一节中，恒设$\{X_n,\ n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的一个时齐的可数状态的马尔可夫链，其状态空间$E=R_1^+$由一个正类所构成，其转移阵为$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$。再设$f$是定义在$E$上的一个实值函数，$y_n=f(X_n)$，$S_n=\sum\limits_{j=0}^{n}y_j$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。由于$E=R_1^+$，所以，任取$i\in E$，$\{X_n,\ n\geqslant 0\}$无穷多次处于状态$i$的概率为1。因此除去一个$\Omega$中的零概率集$\Lambda$，对每一个$\omega\in\Omega-\Lambda$，序列$\{X_n(\omega),\ n\geqslant 0\}$有无穷多项为$i$。不失普遍性，可设对每一个$\omega\in\Omega$，$\{X_n(\omega),\ n\geqslant 0\}$均含一个恒为$i$的子序列，令此子序列为：$\{X_{\tau_\nu(i,\omega)}(\omega),\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\}$，此即$\tau_\nu(i,\ \omega)$是$\{X_n(\omega),\ n\geqslant 0\}$第$\nu$次处于状态$i$的时刻，显然，

$$\tau_1(i,\ \omega)<\tau_2(i,\ \omega)<\cdots<\tau_\nu(i,\ \omega)<\cdots,\quad \omega\in\Omega,\quad i\in E,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\tau_\nu(i,\omega)=\infty,\quad \omega\in\Omega,\quad i\in E.$$

简记$\tau_\nu(i,\cdot)$为$\tau_\nu(i)$・再令

$$\rho_\nu(i)=\tau_{\nu+1}(i)-\tau_\nu(i),$$

$l(n,i)$是由不等式

$$\tau_{l(n,i)}(i)\leqslant n<\tau_{l(n,i)+1}(i),\quad (n\geqslant 1),\tag{8.1}$$

所确定的唯一的非负整值随机变量。(显然，$\tau_\nu(i)$，$\rho_\nu(i)$，$l(n,i)$都是随机变量．）由于本节均考虑E中一个固定状态i，所以有时把i略去不写，而把$\tau_\nu(i)$，$\rho_\nu(i)$，$l(n,i)$简写成τ_ν，ρ_ν，$l(n)$。令

$$Y_\nu=\sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1}y_j,\tag{8.2}$$

则

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} y_j = \sum_{j=0}^{\tau_1-1} y_j + \sum_{\nu=1}^{l(n)} Y_\nu - \sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1} y_j,$$

若令

$$Y' = \sum_{j=0}^{\tau_1-1} y_j, \qquad Y''(n) = \sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1} y_j,$$

则有

$$S_n = Y' + \sum_{\nu=1}^{l(n)} Y_\nu - Y''(n). \tag{8.3}$$

再设$E(Y_\nu)$存在。令$\mu = E(Y_\nu)/E(\rho_\nu)$,

$\bar{f} = f - \mu, \quad z_j = \bar{f}(X_j) = y_j - \mu,$

$$Z_\nu = \sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1} z_j, \qquad U_\nu = \sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1} |z_j|,$$

则有

$$S_n - n\mu = \sum_{j=0}^{\tau_1-1} z_j + \sum_{\nu=1}^{l(n)} Z_\nu - \sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1} z_j$$

$$\overset{\text{记作}}{=} Z' + \sum_{\nu=1}^{l(n)} Z_\nu - Z''(n). \tag{8.4}$$

再设 $E(U_\nu^2) < \infty$, $0 < \sigma^2 = Var(Z_\nu) = E(Z_\nu^2) < \infty$ (其中$Var(Z_\nu) = E(Z_\nu^2) - E(Z_\nu)^2$表$Z_\nu$的方差)。令$B = \pi_i \sigma^2$,其中$\pi_i = \pi_{j,i}$,$\Pi = (\pi_{i,j}, j,i \in E)$是P的遍历极限，因为$E = R_1^+$，从而$\pi_i > 0$。再令

$$S_r^*(n) = \frac{S_r - r\mu}{\sqrt{nB}}, \qquad W_\nu = \frac{Z_\nu}{\sigma}, \tag{8.5}$$

由〔1〕P.78定理3得知$\{W_\nu, \nu \geq 1\}$是相互独立相同分布的随机变量序列，而且$E(W_\nu) = 0$，$Var(W_\nu) = 1$。对任意正整数n, r，及正数b，令

$$Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu, \qquad Q_r^*(b) = \sum_{\nu=1}^{r} W_\nu / \sqrt{b}. \qquad (8.6)$$

如 $n(\omega)$，$m(\omega)$ 是定义在 Ω 上的非负整值函数，A_1，A_2，…为Ω中一族子集，$n \leqslant m$，则定义 $\bigcup_{t=n}^{m} A_t$ 为，$\omega \in \bigcup_{t=n}^{m} A_t \Longleftrightarrow$ 对一切 $n(\omega) \leqslant t \leqslant m(\omega)$，有$\omega \in A_t$。仿之可定义 $\bigcap_{t=n}^{m} A_t$。

定义8.1. 令

$C = \{\xi(t) \mid \xi(t)$是定义在$[0,1]$上的实值连续函数$, \xi(0) = 0\}$，

$\mathscr{H}$是使一切 $h_t(t \in [0, 1])$为可测的 σ 代数，其中 $h_t(\xi) = \xi(t)$是 ξ的坐标函数，

W 是$\mathscr{H}$上的由下列关系确定的概率测度：对任何正整数 n，任何$0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$，任何一维波勒尔集合 A_1，A_2，…，A_n，有

$$W(\{h_{t_1} - h_{t_0} \in A_1, \cdots, h_{t_n} - h_{t_{n-1}} \in A_n\})$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{A_j} e^{-\frac{x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}} \Big/ \sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})} \cdot dx_j .$$

称$(C, \mathscr{H}, W)$为维纳测度空间，W为维纳测度。

定理8.1. 令 $I_{k,j} = \left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]$，$j = 1, 2, \cdots, k$，$k = 1, 2, \cdots$，

$$u_n(t; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{cases} \lambda_1, & 若\ t = 0, \\ \lambda_j, & 若\ t \in I_{n,j},\ j = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

$$X = \left\{\xi(t) \,\middle|\, \begin{array}{l} \xi(t)是定义在[0,1]上的有界实值 \\ 函数，且除了有限个跳跃点以外均连续 \end{array}\right\},$$

在X中定义距离 ρ：$\rho(\xi_1, \xi_2) = \sup_{t \in [0,1]} |\xi_1(t) - \xi_2(t)|$，令$\mathscr{G}$是由

距离 ρ 所产生的拓扑，$\mathscr{B}^X$是拓扑 σ 代数，即是由全体开集所产生的 σ 代数．于是有可测拓扑空间 $(X,\mathscr{G},\mathscr{B}^X)$．设$C_1\subset C$($C$ 之定义见定义8.1)$\subset X$，$W(C_1)=1$，$F(\xi)$是定义在 X 上的泛函，且对$\mathscr{G}$拓扑来说在 C_1 上连续，对$\mathscr{B}^X$来说可测，则

$$\lim_{n\to\infty} P(F(u_n(t;\ S^*_1(n),\cdots,S^*_n(n)))<\lambda)$$

$$=W(F(\xi)<\lambda) \tag{8.7}$$

在 $W(F(\xi)<\lambda)$的任一连续点 λ 上成立．

此定理的证明较长，须要一系列引理。

引理8.1. 令 k 为固定正整数，$\alpha_j\leqslant\beta_j$ 为固定实数，$(j=1,2,\cdots,k)$，$n_j=\left[\dfrac{jn}{k}\right]$，$\widetilde{n}_j=\left[\dfrac{jl(n)}{k}\right]$，$(j=0,1,\cdots,k)$，其中$[x]$表不大于 x 的最大整数，

$$\wedge^*_n=\{\omega|\omega\in\Omega,\ \alpha_j\leqslant Q^*_{i(r)}(l(n))\leqslant\beta_j,\ n_{j-1}<r\leqslant n_j,j=1,\cdots,k\},$$

$$\widetilde{\wedge}_n=\{\omega|\omega\in\Omega,\ \alpha_j\leqslant Q^*_r(l(n))\leqslant\beta_j,\ \widetilde{n}_{j-1}<r\leqslant\widetilde{n}_j,\ j=1,\cdots,k\},$$

$$A^*_{m,i}(a,b)=\{\omega|\omega\in\Omega,\ a\leqslant Q^*_i(m)\leqslant b\},$$

$$\wedge=\{\xi|\xi\in C,\ \alpha_j\leqslant\xi(t)\leqslant\beta_j,\ t\in I_{k,j},\ j=1,\cdots,k\},$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P(\wedge^*_n)=\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{\wedge}_n)=W(\wedge). \tag{8.8}$$

证 在[47]中，我们已经证明了：

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{\wedge}_n)=W(\wedge), \tag{8.9}$$

(因为 $\lim\limits_{r\to\infty} l(r)/_r=\pi_i>0$,[$a,e$]对$P$)．用叶果洛夫定理得知：对任何给定的 $\varepsilon>0$，$\left(\text{不妨令}\ \varepsilon<\dfrac{\pi_i}{2}\right)$存在正整数 k_0 及 $\Omega_1\in\mathscr{F}$，$P(\Omega_1)>1-\varepsilon$，使

$$\left|\frac{l(r)}{r}-\pi_i\right|<\varepsilon\ ,\qquad (\omega\in\Omega_1,\ r\geqslant k_0). \tag{8.10}$$

令 $\widetilde{N}_j=\widetilde{n}_j+2\varepsilon n_j$，$\widetilde{M}_j=\widetilde{n}_j-2\varepsilon n_j-1$，则由(8.10)可得

$$\Omega_1\wedge_n^*\subset\Omega_1\Big[\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{r=n_{j-1}+1}^{n_j}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_j,\ \beta_j)\bigcap_{r=k_1}^{n_1}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_1,\beta_1)\Big]$$

$$\subset\Omega_1\Big[\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{l(r)=[n_{j-1}(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_j(\pi_j-\varepsilon)]}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_j,\beta_j)\bigcap_{l(r)=[k_0(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_1(\pi_j-\varepsilon)]}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_1,\beta_1)\Big]$$

$$\subset\Omega_1\Big[\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{t=[n_{j-1}(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_j(\pi_j-\varepsilon)]}A^*_{l(n),t}(\alpha_j,\beta_j)\bigcap_{t=[k_0(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_1(\pi_j-\varepsilon)]}A^*_{l(n),t}(\alpha_1,\beta_1)\Big]\qquad(8.11)$$

令

$$N_j=[n_j(\pi_i-\varepsilon)],\quad M_j=[n_j(\pi_i+\varepsilon)]+1,$$

$$\bar{k}=[k_0(\pi_i+\varepsilon)]+1,$$

若注意 $N_j\leqslant M_j$，且取 $\varepsilon>0$ 充分小，当 n 充分大时有 $N_j>M_{j-1}$，再令

$$B^{(n)}_{j,t}(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,\ |Q^*_t(l(n))-Q^*_{M_{j-1}}(l(n))|<\delta\},$$

$$(N_{j-1}\leqslant t\leqslant M_{j-1},\ j=2,\cdots,k),$$

$$C^{(n)}_{j,t}(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,\ |Q^*_t(l(n))-Q^*_{N_j}(l(n))|<\delta\},$$

$$(N_j\leqslant t\leqslant M_j,\ j=1,\cdots,k).$$

$$D^{(n)}_t(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,|Q^*_t(l(n))-Q_{\bar{k}}(l(n))|<\delta\},$$

$$(1\leqslant t\leqslant\bar{k}).$$

则由(8.11)得

$$\Omega_1 \wedge_n^* \subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup$$

$$\cup\, \Omega_1 \overline{G^{(n)}(\delta)} \Big[\bigcap_{j=2}^{k} \bigcap_{i=[n_{j-1}(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_j(\pi_j-\varepsilon)]} A^*_{l(n);i}(\alpha_j,\beta_j)$$

$$\bigcap_{i=[k_0(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[n_1(\pi_j-\varepsilon)]} A^*_{l(n);i}(\alpha_1,\beta_1) \Big],$$

其中

$$G^{(n)}(\delta) = \overline{\Big[\bigcap_{j=2}^{k} \bigcap_{i=N_{j-1}}^{M_{j-1}} B^{(n)}_{j,i}(\delta) \bigcap_{i=N_j}^{M_j} C^{(n)}_{j,i}(\delta)}$$

$$\overline{\bigcap_{i=N_1}^{M_1} C^{(n)}_{1,i}(\delta) \bigcap_{i=1}^{\tilde{k}} D^{(n)}_i(\delta) \Big]},$$

$\overline{G^{(n)}(\delta)}$ 表 $G^{(n)}(\delta)$ 的补集。

所以

$$\Omega_1 \wedge_n^* \subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{i=N_{j-1}}^{M_j}$$

$$A^*_{l(n);i}(\alpha_j-\delta,\beta_j+\delta). \tag{8.12}$$

但是，由(8.10)得，当 $n \geqslant k_0$，$\omega \in \Omega_1$ 时有

$$N_j \leqslant \tilde{n}_j(\omega) \leqslant M_j,\quad (j=1,\cdots,k),$$

所以，当 $n \geqslant k_0$ 时由(8.12)可得

$$\Omega_1 \wedge_n^* \subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{i=\tilde{n}_{j-1}}^{\tilde{n}_j}$$

$$A^*_{l(n);i}(\alpha_j-\delta,\beta_j+\delta)$$

$$= \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \tilde{\wedge}_{n;\delta}\ , \tag{8.13}$$

其中

$$\tilde{\wedge}_{n,\delta} = \{\alpha_j - \delta \leqslant Q_r^*(l(n)) \leqslant \beta_j + \delta,$$

$$\tilde{n}_{j-1} < r \leqslant \tilde{n}_j,\ \ j=1,\cdots,k\}.$$

所以，当 $n\geqslant k_0$ 时有

$$P(\Omega_1\wedge_n^*)\leqslant P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta))+P(\widetilde{\wedge}_{n,\delta}). \tag{8.14}$$

但是，当 $n\geqslant k_0$，$\omega\in\Omega_1$ 时，由(8.10)有

$$l(n,\omega)\geqslant n(\pi_i-\varepsilon),$$

所以

$$\begin{aligned}
&P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta))\\
&\leqslant\sum_{j=2}^{k}P(\max_{N_{j-1}\leqslant t\leqslant M_{j-1}}|Q_t^*(n(\pi_i-\varepsilon))-Q_{M_{j-1}}^*\\
&\quad\cdot(n(\pi_i-\varepsilon))|\geqslant\delta)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{k}P(\max_{N_j\leqslant t\leqslant M_j}|Q_t^*(n(\pi_i-\varepsilon))\\
&\quad-Q_{N_j}^*(n(\pi_i-\varepsilon))|\geqslant\delta)\\
&\quad+P(\max_{1\leqslant t\leqslant\bar{k}}|Q_t^*(n(\pi_i-\varepsilon))-Q_{\bar{k}}^*(n(\pi_i-\varepsilon))|\geqslant\delta).
\end{aligned}$$

利用柯尔莫哥洛夫不等式有

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta))&\leqslant 2\sum_{j=1}^{k}\frac{(M_j-N_j)Var\left(\frac{W_v}{\sqrt{n(\pi_i-\varepsilon)}}\right)}{\delta^2}\\
&\quad+\bar{k}\,Var\left(\frac{W_v}{\sqrt{n(\pi_i-\varepsilon)}}\right)\\
&\leqslant 2\sum_{j=1}^{k}2(n_j\varepsilon+2)\left(\frac{1}{n(\pi_i-\varepsilon)\delta^2}\right)\\
&\quad+\frac{\bar{k}}{n(\pi_i-\varepsilon)\delta^2}\leqslant\frac{(4n\varepsilon+8)k+\bar{k}}{n(\pi_i-\varepsilon)\delta^2}.
\end{aligned}\tag{8.15}$$

所以，以(8.15)代入(8.14)并注意 $P(\Omega_1)>1-\varepsilon$ 可得

$$P(\wedge_n^*)\leqslant\varepsilon+P(\widetilde{\wedge}_{n,\delta})+\frac{(4n\varepsilon+8)k+\bar{k}}{n(\pi_i-\varepsilon)\delta^2} \tag{8.16}$$

但是，由[47]定理2.1有

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{\wedge}_{n,\delta})=W(\wedge_\delta),$$

其中

$$\wedge_\delta=\{\xi|\xi\in C,\ \alpha_j-\delta\leqslant\xi(t)\leqslant\beta_j+\delta,\ t\in I_{k,j},\ j=1,\cdots,k\}.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge_n^*)\leqslant\varepsilon+W(\wedge_\delta)+\frac{4k\varepsilon}{(\pi_i-\varepsilon)\delta^2}. \tag{8.17}$$

而
$$\lim_{\delta\to 0} W(\wedge_\delta)=W(\wedge).$$

所以，在(8.17)中先令 $\varepsilon\to 0$，次令 $\delta\to 0$ 即得

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge_n^*)\leqslant W(\wedge). \tag{8.18}$$

仿(8.11)，$n\geqslant k_0$ 时有

$$\Omega_1\widetilde{\Lambda}_n=\Omega_1\bigcap_{j=1}^{k}\bigcap_{r=\bar n_{j-1}+1}^{\bar n_j}A^*_{l(n),r}(\alpha_j,\beta_j)$$

$$\subset\Omega_1\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{r=\bar n_{j-1}+1}^{\bar n_j}A^*_{l(n),r}(\alpha_j,\beta_j)\bigcap_{r=k_0}^{\bar n_1}A^*_{l(n),r}(\alpha_1,\beta_1)$$

$$\subset\Omega_1\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{r=[(\bar n_{j-1}+1)/(\pi_j-\varepsilon)]+1}^{[\bar n_j/(\pi_j+\varepsilon)]}A^*_{r(n),l(r)}(\alpha_j,\beta_j)$$

$$\cdot\bigcap_{r=[k_0/(\pi_1-\varepsilon)]+1}^{[\bar n_1/(\pi_1+\varepsilon)]}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_1,\beta_1)$$

$$\subset\Omega_1\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{r=[(\pi_j+\varepsilon)n_{j-1}/(\pi_j-\varepsilon)+\frac{1}{\pi_j-\varepsilon}]+1}^{[(\pi_j-\varepsilon)n_j/(\pi_j+\varepsilon)]}A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_j,\beta_j)\bigcap$$

$$\bigcap_{r=[k_0/(\pi_1-\varepsilon)]+1}^{[(\pi_1-\varepsilon)n_1/(\pi_1+\varepsilon)]} A^*_{1(n),1(r)}(\alpha_1,\ \beta_1). \tag{8.19}$$

令

$$k_2=\left[\frac{k_0}{\pi_1-\varepsilon}\right]+1, N'_j=\left[\frac{\pi_j-\varepsilon}{\pi_j+\varepsilon}n_j\right],$$

$$M'_j=\left[\frac{\pi_j+\varepsilon}{\pi_j-\varepsilon}n_j+\frac{1}{\pi_j-\varepsilon}\right]+1,$$

则$N'_j<M'_j$，且取$\varepsilon>0$充分小，当n充分大后总有$N'_j>M'_{j-1}$。(8.19)可化为

$$\Omega_1\tilde{X}_n\subset\Omega_1\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{r=M'_{j-1}}^{N'_j}A^*_{j(n),l(r)}(\alpha_j,\ \beta_j)\bigcap$$

$$\bigcap_{r=k_2}^{N'_1}A^*_{1(n),1(r)}(\alpha_1,\ \beta_1).$$

令

$$\tilde{B}^{(n)}_{j,t}(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,\ |Q^*_t(l(n))-Q^*_{N'_{j-1}}(l(n))|<\delta\},$$

$$(N'_{j-1}\leqslant t\leqslant M'_{j-1},\ j=2,\ \cdots,\ k),$$

$$\tilde{C}^{(n)}_{j,t}(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,|Q^*_t(l(n))-Q^*_{N'_j}(l(n))|<\delta\},$$

$$(N'_j\leqslant t\leqslant M'_j,\ j=1,\ \cdots,\ k),$$

$$\tilde{D}^{(n)}_t(\delta)=\{\omega|\omega\in\Omega,\ |Q^*_t(l(n))-Q^*_{k_2}(l(n))|<\delta\},$$

$$\tilde{G}^{(n)}(\delta)=\overline{\left[\bigcap_{j=2}^{k}\bigcap_{t=N'_{j-1}}^{M'_{j-1}}\tilde{B}^{(n)}_{j,t}(\delta)\bigcap_{t=N'_j}^{M'_j}\tilde{C}^{(n)}_{j,t}(\delta)\bigcap_{t=N'_1}^{M'_1}\tilde{C}^{(n)}_{1,t}(\delta)\bigcap_{t=1}^{k_2}\tilde{D}^{(n)}_t(\delta)\right]},$$

则仿(8.13)有

$$\Omega_1\tilde{X}_n\subset\Omega_1\tilde{G}^{(n)}(\delta)\cup$$

$$\cup \Omega_1 \bigcap_{j=2}^{k} \bigcap_{r=N'_{j-1}}^{N'_j} A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_j, \beta_j) \bigcap_{r=k_1}^{N'_1} A^*_{l(n),l(r)}(\alpha_1, \beta_1)$$

$$\overline{[\tilde{G}^{(n)}(\delta)]}$$

$$\subset \Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{r=n_{j-1}+1}^{n_j} A^*_{l(n)l(r)}(\alpha_j - \delta, \beta_j + \delta)$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}} \Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \wedge^*_{n;\delta};$$

其中

$$\wedge^*_{n,\delta} = \left\{ \omega \middle| \omega \in \Omega, \alpha_j - \delta \leqslant Q^*_{l(r)}(l(n)) \leqslant \beta_j + \delta, \begin{array}{l} n_{j-1} < r \leqslant n_j, \\ j = 1, \cdots, k \end{array} \right\}.$$

所以，若注意$P(\Omega_1) > 1 - \varepsilon$则得

$$P(\bar{\Lambda}_n) \leqslant \varepsilon + P(\wedge^*_{n;\delta}) + P(\Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta))$$

从而

$$P(\wedge^*_n) \geqslant P(\bar{\Lambda}_{n;-\delta}) - \varepsilon - P(\Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta)).$$

所以，由(8.9)有：

$$\liminf_{n\to\infty} P(\wedge^*_n) \geqslant W(\wedge_{-\delta}) - \varepsilon - \limsup_{n\to\infty} P(\Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta)). \tag{8.20}$$

完全仿照(8.15)可估计

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} P(\Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta)) = 0.$$

所以，在(8.20)中先令$\varepsilon\to 0$次令$\delta\to 0$，并注意

$$\lim_{\delta\to 0} W(\wedge_{-\delta}) = W(\wedge)$$

则可得

$$\liminf_{n\to\infty} P(\wedge^*_n) \geqslant W(\wedge). \tag{8.21}$$

由(8.18)及(8.21)立即得引理8.1。

引理8.2 (1) 对任何$\varepsilon > 0$，均有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leqslant r\leqslant n} \left| \frac{Z''(r)}{\sqrt{n}} \right| \geqslant \varepsilon \right) = 0, \tag{8.22}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} Z'/\sqrt{n}=0$, $[a.e.](P)$, (8.23)

其中 $Z''(r)=\sum\limits_{j=r+1}^{\tau_{l(r)+1}-1} z_j$, $z_j=y_j-\mu$, Z' 均如(8.4)所定义。

证 (1) 因为 $\tau_{l(r)}\leqslant r$, 所以

$$|Z''(r)|\leqslant\sum_{j=r+1}^{\tau_{l(r)+1}-1}|z_j|\leqslant\sum_{j=\tau_{l(r)}}^{\tau_{l(r)+1}-1}|z_j|\equiv U_{l(r)}.$$

但是 $0\leqslant l(r)\leqslant r$, 所以

$$P\left(\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\frac{Z''(r)}{\sqrt{n}}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\frac{U_{l(r)}}{\sqrt{n}}\right|\geqslant\varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\frac{U_r}{\sqrt{n}}\right|\geqslant\varepsilon\right).$$

而$\{U_r, r\geqslant1\}$是相互独立相同分布的随机变量序列（证明可参看[1]P.78)，此外，我们还假定了$E(U_r^2)<\infty$，所以，由

$$P\left(\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\frac{Z''(r)}{\sqrt{n}}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant n\,P(U_r\geqslant\varepsilon\sqrt{n})$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{U_r\geqslant\varepsilon\sqrt{n}\}}U_r^2dP$$

可得(1)。

至于(2) 的证明，可见[1] § 14。

引理8.3. 设$S_r^*(n)=(S_r-\mu r)/\sqrt{nB}$如(8.5)所定义，再令 $\wedge_n^{**}=\{\omega|\omega\in\Omega,\ \alpha_j\leqslant S_r^*(n)\leqslant\beta_j,\ n_{j-1}<r\leqslant n_j,\ j=1,\cdots,k\}$,

则有

$$\lim_{n\to\infty}P(\wedge_n^{**})=W(\wedge). \tag{8.24}$$

证 由(8.4)、(8.5)有

$$S_r^*(n)=\frac{1}{\sqrt{nB}}\left(Z'+\sum_{\nu=1}^{l(r)}Z_\nu-Z''(r)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{nB}}(Z - Z''(r)) + \left(\sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} \sum_{\nu=1}^{l(r)} \frac{W_\nu}{\sqrt{l(n)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{nB}}(Z' - Z''(r)) + \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} Q^*_{l(r)}(l(n))$$

$$= \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}}\left(\sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}}(Z' - Z''(r)) + Q^*_{l(r)}(l(n))\right).$$

令

$$V^*_r(n) = \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}}(Z' - Z''(r)) + Q^*_{l(r)}(l(n)),$$

$$\wedge^{***}_n = \{\omega | \omega \in \Omega, \quad \alpha_j \leqslant V^*_r(n) \leqslant \beta_j, \quad n_{j-1} < r \leqslant n_j,$$
$$j = 1, \cdots, k\},$$

则由引理8.2得知(注意$\lim\limits_{n\to\infty} l(n)/n = \pi_i$，[a.l.])

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} \max_{1\leqslant r\leqslant n} |Z' - Z''(r)| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

所以若令

$$\Omega_2(\varepsilon) = \left\{\omega \left| \omega \in \Omega, \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} \max_{1\leqslant r\leqslant n} |Z' - Z''(r)| \geqslant \varepsilon \right.\right\},$$

则有：

$$\wedge^{***}_n \subset \Omega_2(\varepsilon) \cup \wedge^{***}_n [\overline{\Omega_2(\varepsilon)}]$$
$$\subset \Omega_2(\varepsilon) \cup \{\alpha_j - \varepsilon \leqslant Q^*_{l(r)}(l(n)) \leqslant \beta_j + \varepsilon, \ n_{j-1} < r \leqslant n_j,$$
$$j = 1, \cdots, k\}.$$

因此，由引理8.1有：

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge^{***}_n) \leqslant W(\wedge_\varepsilon),$$

令$\varepsilon \to 0$即得

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge^{***}_n) \leqslant W(\wedge).$$

仿之可证

$$\liminf_{n\to\infty} P(\wedge^{***}_n) \geqslant W(\wedge).$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} P(\wedge_n^{***}) = W(\wedge). \qquad (8.25)$$

又 $\quad S_r^*(n) = \sqrt{\dfrac{l(n)}{n\pi_i}}\, V_r^*(n),$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} = 1,\ [a.e.],$$

所以，对任何$\varepsilon>0$，$\eta>0$，均存在$\Omega_0\subset\Omega$，$P(\Omega_0)>1-\eta$，及$\bar{n}_0$（不依赖ω）使

$$\max\left\{\left|\frac{1-\delta(n,\omega)}{\delta(n,\omega)}\right|,\ |1-\delta(n,\omega)|\right\}\leqslant\min\left\{\frac{\varepsilon}{D},\ \varepsilon\right\},$$

$$(n\geqslant\bar{n}_0,\ \omega\in\Omega_0),$$

其中

$$\delta(n)=\sqrt{l(n)/n\pi_i},\ D=\max\{|\alpha_1|,\ \cdots,\ |\alpha_k|,\ |\beta_1|,\ \cdots,\ |\beta_k|\}.$$

因此，

$$\wedge_n^{**}\subset\wedge_n^{**}\Omega_0\cap\bar{\Omega}_0$$
$$=\{\omega|\omega\in\Omega,\ \alpha_j\leqslant\delta_{(n)}V_r^*(n)\leqslant\beta_j,\ n_{j-1}<r\leqslant n_j,\ j=1,\ \cdots,\ k\}\Omega_0\cup\bar{\Omega}_0.$$

但是，当$n\geqslant\bar{n}_0$时，任取$\omega\in\Omega_0\cap\{\omega|\omega\in\Omega,\alpha_j\leqslant\delta_{(n)}V_r^*(n)\leqslant\beta_j\}$，必有

$$V_r^*(n,\omega)\leqslant V_r^*(n,\omega)\delta(n,\omega)+\left|\frac{1-\delta(n,\omega)}{\delta(n,\omega)}\right||\delta(n,\omega)V_r^*(n,\omega)|\leqslant\beta_j+\min\left\{\frac{\varepsilon}{D},\ \varepsilon\right\}D\leqslant\beta_j+\varepsilon,$$

仿之可证：

$$V_r^*(n,\omega)\geqslant V_r^*(n,\omega)\delta(n,\omega)-\left|\frac{1-\delta(n,\omega)}{\delta(n,\omega)}\right||\delta(n,\omega)V_r^*(n,\omega)|$$
$$\geqslant\alpha_j-\min\left\{\frac{\varepsilon}{D},\ \varepsilon\right\}D\geqslant\alpha_j\ \varepsilon,$$

所以，$n \geqslant \bar{n}_0$时有

$$\wedge_n^{**} \subset \bar{\Omega}_0 \cup \{\omega | \omega \in \Omega, \ \alpha_j - \varepsilon \leqslant V_r^*(n) \leqslant \beta_j + \varepsilon, \ n_{j-1} < r$$

$$\leqslant n_j, \ j=1, \ \cdots, \ k\} \xlongequal{\text{记作}} \bar{\Omega}_0 \cup \wedge_{n,\varepsilon}^{**}.$$

而由(8.25)有

$$\lim_{n\to\infty} P(\wedge_{n,\varepsilon}^{**}) = W(\wedge_\varepsilon).$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge_n^{**}) \leqslant W(\wedge_\varepsilon) + \varepsilon, \tag{8.26}$$

令$\varepsilon \to 0$即得：

$$\limsup_{n\to\infty} P(\wedge_n^{**}) \leqslant W(\wedge). \tag{8.27}$$

仿之可证

$$\liminf_{n\to\infty} P(\wedge_n^{**}) \geqslant W(\wedge). \tag{8.28}$$

由(8.27)、(8.28)即得引理8.3.

引理8.4. 令

$$H_n = \{\omega | \omega \in \Omega, \ \alpha_j \leqslant u_n(t; S_1^*(n), \cdots, \ S_n^*(n)) \leqslant \beta_j, \ t \in I_{k,j},$$

$$j=1, \cdots, \ k, \ \},$$

$$p_j^{(n)}(\omega) = \sup_{t \in I_{k,j}} u_n(t; S_1^*(n), \cdots, S_n^*(n)), \ j=1, \cdots, k,$$

$$q_j^{(n)}(\omega) = \inf_{t \in I_{k,j}} u_n(t; \ S_1^*(n), \cdots, S_n^*(n)), \ j=1, \cdots, k,$$

$$p_j(\xi) = \sup_{t \in I_{k,j}} \xi(t), \quad q_j(\xi) = \inf_{t \in I_{k,j}} \xi(t), \ \xi \in C, j=1, \ \cdots, k,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} P(H_n) = W(\wedge), \tag{8.29}$$

即是

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_\Gamma(p_1^{(n)}, \cdots, p_k^{(n)}; \ q_1^{(n)}, \cdots, q_k^{(n)}) P(d\omega)$$

$$= \int_c \chi_\Gamma(p_1, \cdots, p_k; \ q_1, \cdots, q_k) W(d\xi), \tag{8.30}$$

其中$\Gamma=\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2k})\,|\,-\infty<\lambda_j\leqslant\beta_j,\ \alpha_j\leqslant\lambda_{j+k}<\infty,\ j=1,\cdots,k\}$，$\chi_\Gamma$代表$\Gamma$上的示性函数，即$\chi_\Gamma(\lambda)=1$当$\lambda\in\Gamma$，$\chi_\Gamma(\lambda)=0$当$\lambda\bar{\in}\Gamma$。

证. 令

$$\Phi_n^*=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ \alpha_j\leqslant S_i^*(n)\leqslant\beta_j,n_{j-1}+1<i\leqslant n_j,j=1,\cdots,k\},$$

$$\Phi_{n,\eta}^*=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ \alpha_j-\eta\leqslant S_i^*(n)\leqslant\beta_j+\eta,\ n_{j-1}+1<i\leqslant n_j,$$
$$j=1,\cdots,k\},$$

$$\Psi_{n,\eta}^*=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ \max\{|S_{n_{j-1}+1}^*(n)-S_{n_{j-1}+2}^*(n)|,$$
$$|S_{n_j+1}^*(n)-S_{n_j}^*(n)|,\ j=1\cdots,\ k\}\geqslant\eta\},$$

则

$$\Lambda_n^{**}\subset\Phi_n^*\subset(\Psi_{n,\eta}^*\cup(\Phi_n^*\cap\bar{\Psi}_{n,\eta}^*))$$
$$\subset(\Psi_{n,\eta}^*\cup\Lambda_{n,\eta}^{**}),\tag{8.31}$$

其中

$$\Lambda_{n,\eta}^{**}=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\alpha_j-\eta\leqslant S_i^*(n)\leqslant\beta_j+\eta,n_{j-1}<i\leqslant n_j,\ j=1,\cdots,k\}.$$

又因为k是固定的，所以n充分大时有：

$$I_{n,[(j-1)n/k]+2},\cdots,I_{n,[jn/k]}\subset I_{k,j},(j=1,\cdots,k).\tag{8.32}$$

所以，若令

$$J_{k,j}^{(n)}=I_{k,j}-\left(\bigcup_{i=[(j-1)n/k]+2}^{[jn/k]}I_{n,i}\right),$$

则当n充分大时，由$u_n(t;\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$的定义有

$$H_n=\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n))\leqslant\beta_j,t\in I_{k,j}\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n))\leqslant\beta_j,\ t\in J_{k,j}^{(n)}\}\cap$$

$$\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n))\leqslant\beta_j,$$

$$t\in\bigcup_{i=[(j-1)n/k]+2}^{[jn/k]}I_{n,i}\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n))\leqslant\beta_j,\ t\in J_{k,j}^{(n)}\}\cap$$

$$\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant S_i^*(n)\leqslant\beta_j,\ [(j-1)n/k]+2\leqslant i\leqslant[jn/k]\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\ \cdots,\ S_n^*(n))\leqslant\beta_j,$$

$$t\in J_{k,j}^{(n)}\}\cap\Phi_n^*. \tag{8.33}$$

但是，n充分大后有

$$J_{k,j}^{(n)}\subset I_{n,[(j-1)n/k]+1}\cup I_{n,[jn/k]+1}, \tag{8.34}$$

所以

$$\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\ \cdots,\ S_n^*(n))\leqslant\beta_j,\quad t\in J_{k,j}^{(n)}\}$$

$$\supset\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant u_n(t;\ S_1^*(n),\ \cdots,\ S_n^*(n))\leqslant\beta_j,$$

$$t\in I_{n,[(j-1)n/k]+1}\cup I_{n,[jn/k]+1}\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{k}\{\alpha_j\leqslant S_{n_{j-1}+1}^*(n)\leqslant\beta_j,\ \alpha_j\leqslant S_{n_j+1}^*(n)\leqslant\beta_j\}. \tag{8.35}$$

因此，由（8.33）及（8.35）有

$$\Phi_n^*\supset H_n\supset(\Phi_{n,-\eta}^*\cap\overline{\Psi}_{n,\eta}^*),\quad (n充分大),$$

所以

$$(\Phi_n^*\cup\Psi_{n,\eta}^*)\supset(H_n\cup\Psi_{n,\eta}^*)\supset\Phi_{n,-\eta}^*. \tag{8.36}$$

但是，

$$P(\Psi_{n,\eta}^*)\leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant k}|S_{n_{j-1}+1}^*(n)-S_{n_{j-1}+2}^*(n)|\geqslant\eta)$$

$$+P(\max_{1\leqslant j\leqslant k}|S_{n_j+1}^*(n)-S_{n_j}^*(n)|\geqslant\eta),$$

而 $P(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}|S_{n_j+1}^*(n)-S_{n_j}^*(n)|\geqslant\eta)$

$$=P(\max_{1\leqslant j\leqslant k}|y_{n_j+1}-\mu|\geqslant\eta\sqrt{nB}),$$

$$U_\nu = \sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1} |z_j| = \sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1} |y_j - \mu|, \quad \tau_{l(n)} \leqslant n < \tau_{l(n)+1},$$

所以

$$|y_n - \mu| \leqslant \sum_{j=\tau_{l(n)}}^{\tau_{l(n)+1}-1} |y_j - \mu| = U_{l(n)},$$

因此，仿引理8.2有：

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant k} |S^*_{n_{j+1}}(n) - S^*_{n_j}(n)| \geqslant \eta)$$

$$\leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant k} U_{l(n_{j+1})} \geqslant \sqrt{nB})$$

$$\leqslant P(\max_{1\leqslant r\leqslant n+1} U_r \geqslant \eta\sqrt{nB}) \to 0, (当 n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} P(\Psi^*_{n,\eta}) = 0. \tag{8.37}$$

由（8.37）、（8.31）及引理8.3 得知

$$W(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} P(\Lambda^{**}_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} P(\Phi^*_n)$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} P(\Phi^*_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} P(\Lambda^*_{n,\eta}) + \lim_{n\to\infty} P(\Psi^*_{n,\eta})$$

$$= W(\Lambda_\eta). \tag{8.38}$$

在（8.38）中令$\eta\to 0$并注意$\lim_{\eta\to 0} W(\Lambda_\eta) = W(\Lambda)$ 则得

$$\lim_{n\to\infty} P(\Phi^*_n) = W(\Lambda). \tag{8.39}$$

由（8.36）、（8.37）、（8.39）得：

$$W(\Lambda) \geqslant \limsup_{n\to\infty} P(H_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} P(H_n) \geqslant W(\Lambda_{-\eta}). \tag{8.40}$$

在（8.40）中令$\eta\to 0$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} P(H_n) = W(\Lambda). \tag{8.41}$$

引理8.4得证。

引理8.5. 若$F(\xi)$ 是定义在X上的有界泛函，而且对$\mathscr{G}$拓扑来说在C_1上连续，对$\mathscr{B}^X$可测，$C_1 \subset C \subset X, W(C_1) = 1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} F(u_n(t; S_1^*(n), \cdots, S_n^*(n)))P(d\omega)$$

$$=\int_C F(\xi)W(d\xi).$$

证 从引理8.4中(8.30)出发,可以证明：若$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_{2k})$是$2k$维波勒尔可测函数，而且有界,在任何$2k$维区间上黎曼可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f(p_1^{(n)}, \cdots, p_k^{(n)}; q_1^{(n)}, \cdots, q_k^{(n)})P(d\omega)$$

$$=\int_C f(p_1, \cdots, p_k; q_1, \cdots, q_k)W(d\xi). \tag{8.42}$$

(详见[47]定理2.3)。

又因为对任何一个满足引理8.5中的条件的$F(\xi)$来说，对任何$\varepsilon>0$，都存在X上的有界泛函$F_1(\xi)$，$F_2(\xi)$，使

$$F_1(\xi)\leqslant F(\xi)\leqslant F_2(\xi),\ \xi\in X,$$

$$\int_C (F_2(\xi)-F_1(\xi))W(d\xi)\leqslant\varepsilon,$$

而且$F_i(\xi)$可以表为

$$F_i(\xi)=f_i(p_1(\xi), \cdots, p_k(\xi); q_1(\xi), \cdots, q_k(\xi)),\ (i=1,2),$$

其中f_i是$2k$维的有界的波勒尔可测函数，在任何$2k$维区间上黎曼可积．故由(8.42)得引理8.5。

引理8.6． 设$F(\xi)$满足定理8.1中的条件，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} e^{i\nu F(u_n(t; S_1^*(n); \cdots; S_n^*(n)))}P(d\omega)$$

$$=\int_C e^{i\nu F(\xi)}W(d\xi). \tag{8.43}$$

证 由引理8.5即得引理8.6.

利用引理8.6及分布函数与特征函数之间的连续性定理即得定理8.1。

例8.1. 若取$F(\xi)=\xi(1)$，则F满足定理8.1中的条件，且

$$F(u_n(t; S_1^*(n), \cdots, S_n^*(n))) = S_n^*(n),$$

所以由定理8.1有

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n^*(n)<\lambda) = W(F(\xi)<\lambda)$$

$$= W(\{\xi \mid \xi(1)<\lambda\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt.$$

第二篇　可数状态的时齐的马尔可夫过程

§1.　P过程的概率空间，存在性定理

令 $\boldsymbol{T}=[0,\infty)$ 为时间参数集，E为任一可数集（不妨令之为非负整数集）。

定义1.1. 设$p_{i,j}(t)$是定义在$\boldsymbol{T}$上的非负实值函数，($i,j\in$ E)，称矩阵$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$是准转概阵。如果(1) $P(t)1\leqslant 1$；(2) $P(s+t)=P(s)P(t)$，$(0\leqslant s,t<\infty)$。特别地，若(1)中不等号换成等号，则称$P(t)$是转概阵，满足$P(0)=P(0+)=I$的（准）转概阵称为标准的，（此处I为单位阵）。(2)称为K—C方程。

如不特别声明，今后凡遇矩阵之间比较大小，取极限、连续、微商、积分…等，均系逐元意义下的。

令$\Omega=E^T$为乘积空间，Ω中的元ω是$\boldsymbol{T}$到E之变换，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$是转概阵，$P(0)=I$。任取$t\in T$，$A\subset$E，记$\begin{bmatrix} t \\ A \end{bmatrix}=\{\omega|\omega(t)\in A\}$，特别地，若$A$是单点集$\{j\}$，则记$\begin{bmatrix} t \\ A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ j \end{bmatrix}$。

若$A_1,\cdots,A_n\in E$，则记 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} t_i \\ A_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ A_1,\cdots,A_n \end{bmatrix}$。

令 $\mathscr{F}=\sigma\left(\begin{bmatrix} t \\ j \end{bmatrix},\ t\in\boldsymbol{T},\ j\in E\right)$，

$$P^i\left(\begin{bmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ i_1,\cdots,i_n \end{bmatrix}\right)=p_{i,i_1}(t_1)p_{i_1,i_2}(t_2-t_1)$$

$\cdots p_{i_{n-1},i_n}(t_n - t_{n-1})$,

$(i,i_1,\cdots,i_n\in E, 0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n)$，用柯尔莫哥洛夫定理，$P^i$ 可唯一地扩张到 $\mathscr{F}$ 上去而成一概率测度，仍用P^i记之，于是得概率空间（Ω, F, P^i），($i\in$ E)。

再定义一族由 Ω到 Ω 的推移算子 θ_t（$t\in T$）如下：任取 $\omega=\omega(t)\in\Omega$，定义$\theta_t\omega=\tilde{\omega}$，$\tilde{\omega}(s)=\omega(s+t)(s\in\boldsymbol{T})$。令$X_t$是$\Omega$上的坐标变换：$X_t(\omega)=\omega(t)$，$t\in\boldsymbol{T}$，$\omega\in\Omega$。称$X=(\Omega,\mathscr{F},X_t,\theta_t,P^i)$，$i\in$ E）为P过程。$(\Omega,\mathscr{F},P^i)$ 为P过程的概率空间。

令 $\mathscr{F}_s=\sigma\left(\begin{bmatrix}u\\j\end{bmatrix},\ u\leqslant s,\ i\in E\right)$，仿第一篇(1.1)，有

$$(M):\ P^i\left(A\cap\begin{bmatrix}s\\j\end{bmatrix}\cap\theta_s^{-1}B\right)=P^i\left(A\cap\begin{bmatrix}s\\j\end{bmatrix}\right)P^j(\theta_{t-s}^{-1}B),\tag{1.1}$$

$(i,j\in E,\ A\in\mathscr{F}_s, B\in\mathscr{F}, t\geqslant s\geqslant 0)$。

证 (1) 先取$A=\begin{bmatrix}u\\k\end{bmatrix}$ $u\leqslant s$，$k\in E$ 固定.对任何$B=\begin{bmatrix}v\\l\end{bmatrix}$，$v\geqslant 0, l\in E$，有

$$P^i\left(A\cap\begin{bmatrix}s\\j\end{bmatrix}\cap\theta_t^{-1}B\right)=P^i\left(\begin{bmatrix}u, & s, & t+v\\k, & j, & l\end{bmatrix}\right)$$

$$=p_{i,k}(u)p_{k,j}(s-u)p_{j,l}(t+v-s)$$

$$=p^i\left(A\cap\begin{bmatrix}s\\j\end{bmatrix}\right)p^j(\theta_{t-s}^{-1}B).$$

而使（1.1）成立的B构成一个σ代数，所以对任何$A=\begin{bmatrix}u\\k\end{bmatrix}$，$u\leqslant s$，$k\in E$，$B\in\mathscr{F}$，(1.1）成立。

(2) 又因为任取$B\in\mathscr{F}$，使（1.1）成立的A构成一个σ代数，所以，由（1）即得（1.1）对任何$A\in\mathscr{F}_s$，$B\in\mathscr{F}$成立。

特别地，取$t=s=t_n$，$A=\begin{bmatrix}t_1, & \cdots, & t_{n-1}\\A_1, & \cdots, & A_{n-1}\end{bmatrix}$，

$$B=\begin{bmatrix} t_{n+1}-t_n,\cdots,t_{n+m}-t_n \\ A_{n+1},\ \cdots,\ A_{n+m} \end{bmatrix},\ 0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t_{n+1}\leqslant\cdots$$

$\leqslant t_{n+m}$, $A_i\subset E$, $(i=1,\cdots,n+m)$, 则 (1.1) 变成

$$(M_1):\ P^i\left(\begin{bmatrix} t_1,\cdots t_{n-1},t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+m} \\ A_1,\cdots,A_{n-1},j,A_{n+1},\cdots,A_{n+m} \end{bmatrix}\right)$$

$$=P^i\left(\begin{bmatrix} t_1,\cdots,t_{n-1},t_n \\ A_1,\cdots,A_{n-1},j \end{bmatrix}\right)P^j\left(\begin{bmatrix} t_{n+1}-t_n,\cdots,t_{n+m}-t_n \\ A_{n+1},\cdots,A_{n+m} \end{bmatrix}\right). \tag{1.2}$$

本篇所研究的（准）转概阵 $P(t)$ 都是标准的，以后不再说明.

定义1.2. 设 $(\Omega,\ F,\ P)$ 是任一概率空间，E为可数集，$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$ 为时间参数集，$\{X_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$ 是一族定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 取值于E的随机变量，如果对任意的$n\geqslant 2$，$0\leqslant t_1<\cdots<t_n$，及任意的$i_1,\cdots,i_n\in E$，均有

$$P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_1}=i_1,\cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$$
$$=P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_{n-1}}i_{n-1}), \tag{1.3}$$

(当 (1.3) 左边有意义时)，则称$\{X_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$是一个连续时间的可数状态的马尔可夫过程，简称可数状态的马尔可夫过程. E 称为其状态空间. 如果存在一个转概阵 $P(t)=(p_{ij}(t),\ i,j\in E)$ 使

$$P(X_{s+t}=j\,|\,X_s=i)=p_{ij}(t),\ (i,j\in E,\ s,t\in\boldsymbol{T}),$$

(当左边有意义时)，则称 $\{X_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$ 是具有时齐的转移概率的可数状态的马尔可夫过程，简称可数状态的时齐的马尔可夫过程. 本篇所研究的，都是这类马尔可夫过程. $P(t)$ 称为 $\{X_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$ 的转概阵，$\{P(X_0=i),i\in E\}$称为其初始分布.

定理1.1. (存在性定理) 设E为可数集，$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$，$P(t)=(p_{ij}(t),\ i,j\in E)$ 是转概阵，$\{\mu_i,\ i\in E\}$ 是一个概率分

布，则恒存在一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及定义在其上的以E为状态空间的以$P(t)$为转概阵的以$\{\mu_i, i\in E\}$为初始分布的时齐的马尔可夫过程$\{X_t; t\in \mathbf{T}\}$.

证明仿第一篇定理1.1.

若$(\Omega, \mathscr{F}, X_t, \theta_t, P^i)$, $(i\in E, t\in \mathbf{T})$是一个$P$过程，则对任何$i\in E$, $\{X_t; t\in \mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P^i)$上的以$P(t)$为转概阵的初始分布集中在$i$的可数状态的时齐的马尔可夫过程.故$P$过程实给出一族可数态状的时齐的马尔可夫过程.

§2. 有限维的转概阵的分析理论

设$P(t)=(p_{i,j}(t), i, j\in E)(0\leqslant t<\infty)$是一个有限维（即$E$为有限集）的转概阵。在这一节中，我们将要研究$P(t)$对$t$的连续性、可微性及其逆问题、当$t\to\infty$时$P(t)$的极限的存在性问题及此极限的性质，等等。

引理2.1. 设$A(t)=(a_{i,j}(t), i,j\in E)$是一个有限维的方阵，$(0\leqslant t<\infty)$，而且满足：

(1) $A(s+t)=A(s)A(t)$, $(0\leqslant s,t<\infty)$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0+} A(t)=A(0)=\mathrm{I}$,

其中I为单位矩阵。则

(i) $A(t)$对t连续，$(0\leqslant t<\infty)$;

(ii) $A'(0)\equiv\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}(A(t)-\mathrm{I})$存在，记之为$B$;

(iii) $A'(t)=BA(t)=A(t)B$, $(0\leqslant t<\infty)$;

(iv) $A(t)=e^{Bt}$;

对任一矩阵M来说，我们定义$e^M\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}M^k$.

证 (i) 因为$A(s+t)=A(t)A(s)$, $(0\leqslant s, t<\infty)$，所以由

$\lim\limits_{s\to 0+}A(s)=\mathrm{I}$ 得 $\lim\limits_{s\to 0+}A(s+t)=A(t)$。今设$0<s<t<\infty$，则由$A(t)=A(t-s)A(s)$ 及 s 充分小时$A(s)$ 为非退化矩阵（因为$\lim\limits_{s\to 0+}A(s)=\mathrm{I}$）得知：$A(t-s)=A(t)A(s)^{-1}$。（对任一矩阵$M$来说，$M^{-1}$恒表$M$的逆矩阵。）所以，由$\lim\limits_{s\to 0+}A(s)^{-1}=\mathrm{I}^{-1}=\mathrm{I}$得$\lim\limits_{s\to 0+}A(t-s)=A(t)$。总上所述，当$0<t<\infty$时$A(t)$对$t$连续，而$A(t)$在$t=0$右连续乃是假设，故(i)得证。

(ii) 令

$$\mathscr{M}=\left\{M\,\middle|\,\lim_{t\to 0+}\frac{A(t)-\mathrm{I}}{t}M\text{存在且此矩阵的元素为有限数}\right\}.$$

容易证明：对任何$a>0$，均有

$$\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds\in\mathscr{M}.$$

事实上，当$0<t<a<\infty$时有：

$$\frac{A(t)-\mathrm{I}}{t}\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds=\frac{1}{ta}\int_0^a(A(s+t)-A(s))ds$$

$$=\frac{1}{ta}\left[\int_t^{a+t}A(s)ds-\int_0^a A(s)ds\right]$$

$$=\frac{1}{ta}\left[\int_a^{a+t}A(s)ds-\int_0^t A(s)ds\right].$$

令$t\to 0+$，若注意$A(s)$ 对s的连续性再利用中值定理即得：

$$\lim_{t\to 0+}\frac{A(t)-\mathrm{I}}{t}\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds=\frac{1}{a}(A(a)-\mathrm{I}).$$

所以

$$\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds\in\mathscr{M}.$$

又因为$\mathscr{M}$是一个线性体系，故是闭的，因此

$$\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds\in\mathscr{M}.$$

此即

$$\mathrm{I}=\lim_{s\to 0+}A(s)=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}\int_0^a A(s)ds\in\mathscr{M}.$$

亦即

$$\lim_{t\to 0+}\frac{A(t)-I}{t}$$

存在（记此极限为B）且其元素为有限数。(ii) 证毕。

(iii) 因为

$$\frac{A(t+s)-A(t)}{s}=\frac{(A(s)-\mathrm{I})A(t)}{s},\qquad (0<s,<\infty,$$

$0\leqslant t<\infty$),

$$\frac{A(t)-A(t-s)}{s}=\frac{(A(s)-\mathrm{I})A(t-s)}{s},\ (0<s<t<\infty),$$

所以，令$s\to 0+$并注意 (ii) 即得：

$$A'(t)=A(t)B=BA(t).\quad (0\leqslant t<\infty).\ \text{(iii)得证。}$$

(iV) 由于$A(t)$满足

$$\begin{cases}A'(t)=BA(t),\ 0\leqslant t<\infty,\\ A(0)=\mathrm{I},\end{cases}$$

解此常系数的线性微分方程组立即可得$A(t)=e^{Bt}$.

定义2.1. 称方阵

$$Q=\begin{pmatrix}q_{1,1}, & \cdots, & q_{1,N}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{N,1}, & \cdots, & q_{N,N}\end{pmatrix}$$

为转移强度矩阵（简称转强阵），如果它满足：$q_{i,i}\leqslant 0$，($1\leqslant i\leqslant N$)，$q_{i,j}\geqslant 0$，($1\leqslant i,j\leqslant N,i\neq j$)，$\sum_{j=1}^{N}q_{i,j}\leqslant 0$，($1\leqslant i\leqslant N$)。特别地，

若 $\sum_{j=1}^{N} q_{i,j}=0$，$(1\leqslant i\leqslant N)$，则称此转强阵是保守的。

定理2.1. 设$P(t)$是一个有限维的转概阵。

则有

(i) $P'(0)\equiv\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(P(t)-I)$

存在，记此极限为Q，Q是保守的转强阵；

(ii) $P'(t)=QP(t)=P(t)Q$，$(0\leqslant t<\infty)$；

(iii) $P(t)=e^{Qt}$，$(0\leqslant t<\infty)$。

反之，任给一个保守的转强阵Q，则$P(t)\equiv e^{Qt}$ 是转概阵。

证 由引理2.1立即得到 (i)，(ii)，(iii)。现在我们来证明最后这条论断。设Q是一个保守的转强阵，$P(t)\equiv e^{Qt}$。显然$P(t)$满足：$P(t)1=1$，$(0\leqslant t<\infty)$，$P(s+t)=P(s)P(t)$，$(0\leqslant s,t<\infty)$，$P(0)=\lim_{t\to 0+}P(t)=I$。最后我们证明 $P(t)\geqslant 0$，$(0\leqslant t<\infty)$。

(1) 先设对一切$1\leqslant i$，$j\leqslant N$，$i\neq j$，均有$q_{i,j}>0$。则由$P(t)=e^{Qt}=I+Qt+\frac{1}{2!}(Qt)^2+\cdots$得知：存在$\delta>0$，使得$0\leqslant t\leqslant\delta$时有 $P(t)>0$。因此，若能证明

$$P(t)>0,\ (0\leqslant t\leqslant a)\Longrightarrow P(t)>0,\ (0\leqslant t\leqslant 2a),$$

则$P(t)>0$，$(0\leqslant t<\infty)$。事实上，由$P(t)=P(a)P(t-a)(a\leqslant t\leqslant 2a)$ 立得此关系。

(2) 取消(1)中对Q的假定来证明$P(t)\geqslant 0$ $(0\leqslant t<\infty)$。作

$$Q_n=\begin{pmatrix} q_{1,1}-\frac{N-1}{n}, & q_{1,2}+\frac{1}{n}, & \cdots, & q_{1,N}+\frac{1}{n} \\ q_{2,1}+\frac{1}{n}, & q_{2,2}-\frac{N-1}{n}, & \cdots, & q_{2,N}+\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N,1}+\frac{1}{n}, & q_{N,2}+\frac{1}{n}, & \cdots, & q_{N,N}-\frac{N-1}{n} \end{pmatrix},$$

显然，Q_n是一个保守的转强阵，所以由(1)得知 $P_n(t)\equiv e^{Q_n t}\geqslant 0$，$(0\leqslant t<\infty)$。但是$\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=Q$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(t)=P(t)$。因此 $P(t)\geqslant 0$，$(0\leqslant t<\infty)$。至此，定理2.1得证。

定理2.2. 设$P(t)$是一个有限维的转概阵，$Q=P'(0)$，则

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$ 存在，记此极限为Π；

(ii) $P(t)\Pi=\Pi P(t)=\Pi^2=\Pi$，$(t\geqslant 0)$；

(iii) $\Pi\geqslant 0$，$\Pi\mathbf{1}=\mathbf{1}$；

(iv) $\Pi Q=Q\Pi=0$；

(v) $\Pi=\mathbf{1}\pi'$，$\pi'>0\Longleftrightarrow$存在一个$t_0>0$，使$P(t_0)>0$；

(vi) $\Pi=\mathbf{1}\Pi'\Longleftrightarrow x'Q=0,(x'\geqslant 0,x'\in(l))$ 的通解为$c\bar{x}'$，其中c为任一非负实数，$\bar{x}'\neq 0$。

这时 $\pi'=c\bar{x}'/c\bar{x}'\mathbf{1}$。

证 关于 (i) 和 (ii) 我们将要在§3定理3.2中对更一般的情形来证明。

(iii) 由于 $P(t)\geqslant 0,P(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}$，$P(t)$ 是有限维矩阵，所以 $\Pi\geqslant 0$，$\Pi\mathbf{1}=\mathbf{1}$。

(iv) 由(ii)有

$$\frac{P(t)-I}{t}\Pi=\Pi\frac{P(t)-I}{t}=0,\quad (t>0),$$

令$t\to 0+$，即得：

$$Q\Pi=\Pi Q=0.$$

(v) “$\Longrightarrow$” 设$\Pi>0$，由

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\Pi$$

及$P(t)$是有限维矩阵得知：存在一个$t_0>0$，使得$t\geqslant t_0$ 时有

$$P(t)>0,\quad (t\geqslant t_0).$$

“$\Longleftarrow$” 设存在一个$t_0>0$，使$P(t_0)>0$。由

$$\Pi=\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{n\to\infty}P(nt_0)=\lim_{n\to\infty}P(t_0)^n$$

及第一篇命题5.4得知：

$$\Pi = \mathbf{1}\pi', \quad \pi' > 0.$$

(vi) "$\Longleftarrow$" 设$x'Q=0$ 的通解为$c\bar{x}'$. 由 (iv) 有$\Pi Q=0$, 任取其一行, 即用e_i'左乘两边得:

$$\pi_i'Q=0, \quad \pi_i' \geqslant 0, \quad \pi_i'\mathbf{1}=1,$$

所以

$$\pi_i' = c_i\bar{x}',$$

但是 $\pi_i'\mathbf{1}=1$, 即是$c_i\bar{x}'\mathbf{1}=1$, 而$\bar{x}'\mathbf{1}\neq 0$, 所以c_i不依赖于i, 此即Π的行行一样, 亦即$\Pi = \mathbf{1}\pi'$.

"$\Longrightarrow$" 设$\Pi=\mathbf{1}\pi'$,(自然有$\pi'>0$, $\pi'\mathbf{1}=1$), 而且$x'Q=0$, $x'\geqslant 0$, $x'\in(l)$. 往证$x'=c\pi'$. 事实上, 由定理2.1 有

$$P(t)=e^{Qt}=\mathrm{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Qt)^k}{k!},$$

所以

$$x'P(t)=x'+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'(Qt)^k}{k!}=x'.$$

令$t\to\infty$, 并注意 (i), 再利用控制收敛定理得:

$$x'=x'\Pi=x'\mathbf{1}x',$$

取$c=x'\mathbf{1}$即可.

§3. 转概阵的分析理论

在§2中, 我们研究了有限维转概阵$P(t)=(p_{i,j}(t), i,j\in \mathrm{E})$ (E是有限集) 的分析性质。在这一节中, 我们将要研究一般的转概阵$P(t)$的分析性质, 这时E是一个可数集。

定理3.1. 设$P(t)=(p_{i,j}(t), \ i, \ j\in \mathrm{E})$ 是一个转概阵。则对任何$i\in E$, $J\subset E$, $0\leqslant s$, $t<\infty$, 有

$$|p_{i,J}(t)-p_{i,J}(s)|\leqslant 1-p_{i,i}(|t-s|), \tag{3.1}$$

其中 $p_{i,J}(t)=\sum_{j\in J}p_{i,j}(t)$。因此, $p_{i,J}(t)$对t来说在 [0, ∞) 上一

致连续，而且对J来说是等度连续的。特别地，$p_{i,j}(t)$在$t\in[0,\infty)$上一致连续，而且对j来说是等度连续的。

证 不失普遍性可以假设$0\leqslant s<t$。由$(K-c)$方程式有：

$$p_{i,J}(t)\geqslant p_{i,i}(t-s)p_{i,J}(s),$$

所以

$$p_{i,J}(t)-p_{i,J}(s)\geqslant(p_{i,i}(t-s)-1)\,p_{i,J}(s)\geqslant p_{i,i}(t-s)-1. \tag{3.2}$$

由于(3.2)对任何$J\subset E$均成立，特别地对$\bar{J}\equiv E\setminus J$也成立。即是有

$$p_{i,\bar{J}}(t)-p_{i,\bar{J}}(s)\geqslant p_{i,i}(t-s)-1.$$

亦即

$$p_{i,J}(s)-p_{i,J}(t)\geqslant p_{i,i}(t-s)-1. \tag{3.3}$$

由(3.2)及(3.3)立即得到(3.1)。

定理3.2. 设$P(t)$是一个转概阵，则

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$存在，记此极限为$\Pi$；

(ii) $\Pi P(t)=P(t)\Pi=\Pi^2=\Pi$，$(0\leqslant t<\infty)$。

证 (i) 由$(K-c)$方程式有

$$p_{i,i}(t)\geqslant\left(p_{i,i}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(p_{i,i}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n},$$

$$\left(\begin{matrix}i\in E\\0\leqslant t<\infty\end{matrix}\right).$$

但是$\lim\limits_{t\to0^+}p_{i,i}(t)=1$，所以

$$p_{i,i}(t)>0,\ (0\leqslant t<\infty,\ i\in E). \tag{3.4}$$

任意固定一对i，j，简记$f(t)=p_{i,j}(t)$，往证$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在。为此只须证明对任何一串$t_n\uparrow\infty$，均有$\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)$存在。事实上，由(3.4)得知对任何一个固定的$\tau>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P(n\tau)=\lim\limits_{n\to\infty}(P(\tau))^n$存在。由定理3.1得知$f(t)$在$t\in[0,\infty)$上一致连续，所以任意给定一个$\varepsilon>0$，必存在$\tau>0$，使

$$|f(t)-f(s)|\leqslant\varepsilon,\ (|t-s|<\tau). \tag{3.5}$$

对每个n，可取非负整数k_n，使

$$k_n\tau\leqslant t_n<(k_n+1)\tau.$$

所以，由(3.5)得

$$f(k_n\tau)-\varepsilon\leqslant f(t_n)\leqslant f(k_n\tau)+\varepsilon,\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(k_n\tau)$存在，记此极限为$l$。因此

$$l-\varepsilon\leqslant\liminf_{n\to\infty}f(t_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}f(t_n)\leqslant l+\varepsilon.$$

由ε的任意性得知$\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)$存在。

(ii) 由 (i) 及 $P(s+t)=P(t)P(s)$ 并用控制收敛定理得$\Pi=P(t)\Pi$。

仿上，利用$P(s+t)=P(s)P(t)$及法都引理，令 $s\to\infty$ 即得：

$$\Pi\geqslant\Pi P(t),\ (0\leqslant t<\infty).$$

但是$(\Pi P(t))1=\Pi(P(t)1)=\Pi 1$，所以

$$\Pi=\Pi P(t).$$

把上式对$t\to\infty$取极限，并利用控制收敛定理即得$\Pi=\Pi^2$。

引理3.1. 若广义实值函数$f(t)(t\geqslant 0)$满足

(1) $f(u+v)\leqslant f(u)+f(v),(u,\ v\geqslant 0)$；

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=0$，

则

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}. \tag{3.7}$$

证 令$\eta(u)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant u}f(t)$。任取$t>0$，则对任何$u\in(0,\ t)$来说，均有正整数 n，使得：

$$nu<t\leqslant(n+1)u. \tag{3.8}$$

反复地利用(1)及(3.8)得：

$$f(t)\leqslant f(t-nu)+f(nu)\leqslant nf(u)+\eta(u),$$

所以

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\frac{\eta(u)}{t}+\frac{n}{t}f(u). \tag{3.9}$$

令$u\to 0^+$得：

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant \liminf_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}.$$

故

$$\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant \liminf_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}.$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}.$$

定理3.3. 对任何转概阵$P(t)$来说，恒有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}$$

存在，记此极限为q_i，则还有$0\leqslant q_i\leqslant\infty, p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_it}$，$(i\in E, t\geqslant 0)$。

证 在定理3.2中已证$p_{i,i}(t)>0$，$(i\in E, t\geqslant 0)$。所以可以令$f(t)=-\log p_{i,i}(t)$。由于$\lim\limits_{t\to 0^+}p_{i,i}(t)=1$及$p_{i,i}(s+t)\geqslant p_{i,i}(s)p_{i,i}(t)$，$(i\in E, s\geqslant 0, t\geqslant 0)$，所以$f(t)$满足引理3.1中的条件。因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}.$$

令$q_i=\sup\limits_{t>0}\dfrac{f(t)}{t}$，则$f(t)=q_it+o(t),(t\to 0^+)$，而且$f(t)\leqslant q_it$，$(t\geqslant 0)$。所以

$$p_{i,i}(t)=e^{-q_it+o(t)}=e^{-q_it}(1+o(t))=e^{-q_it}+o(t),$$
$$(t\to 0^+).$$

因此，

$$\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=\frac{1-e^{-q_it}}{t}+o(1),\quad (t\to 0^-),$$

此即

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i$$

存在。由$f(t)\leqslant q_i t$直接得到$p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_i t}$，$(t\geqslant 0)$。

系1. 若$q_i=0$，则$p_{i,i}(t)\equiv 1$。

引理3.2. 设$P(t)$是一个转概阵，令

$$\mathscr{M}=\{J\mid J\subset E,\ \lim_{t\to 0^+}\sup_{j\in J}(1-p_{j,j}(t))=0\},$$

$$p_{i,J}(t)=\sum_{j\in J}p_{i,j}(t).$$

任给$J\in\mathscr{M}$，$\varepsilon<\dfrac{1}{4}$，如果$\tau>0$满足：

$$1-p_{j,j}(t)<\varepsilon,\ (0\leqslant t\leqslant\tau,\ j\in J),$$

则对一切$0<v\leqslant\tau$，$0<\dfrac{u}{v}\leqslant\varepsilon$，$K\subset J$，$i\in J\setminus K$,有

$$(1-4\varepsilon)\frac{p_{i,K}(u)}{u}\leqslant\frac{p_{i,K}(v)}{v}. \tag{3.10}$$

证 令 $f_1(i,\ G)=p_{i,G}(u)$，$(i\in E,\ G\subset E)$，$f_{m+1}(i,\ G)=\sum_{j\overline{\in}K}f_m(i,\ \{j\})p_{j,G}(u)$，$(m\geqslant 1)$。显然，固定$i$和$m$时，$f_m(i,\ \cdot)$有完全可加性。下面我们对$m$作归纳法来证明：

$$\begin{aligned}p_{i,G}(t)=&\sum_{l=1}^{m}\sum_{j\in K}f_l(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-lu)\\&+\sum_{j\overline{\in}K}f_m(i,\{j\})p_{j,G}(t-mu),\\&\left(\begin{matrix}G\subset E,\ m\geqslant 1,\\ t\geqslant mu,\end{matrix}\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

当$m=1$时，(3.11)右边等于

$$\sum_{j\in E}f_1(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-u)$$

$$=\sum_{j\in E}p_{i,j}(u)p_{j,G}(t-u)=p_{i,G}(t).$$

若(3.11)对m成立，则

$$p_{i,G}(t)=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{j\in K}f_l(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-lu)$$

$$+\sum_{j\bar{\in} K}f_{m+1}(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-(m+1)u)$$

$$+\sum_{j\bar{\in} K}f_m(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-mu)$$

$$-\sum_{j\in E}f_{m+1}(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-(m+1)u)$$

$$=\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j\in K}f_l(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-lu)$$

$$+\sum_{j\bar{\in} K}f_{m+1}(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-(m+1)u)$$

$$+\sum_{j\bar{\in} K}f_m(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-mu)$$

$$-\sum_{j\in E}\sum_{k\bar{\in} K}f_m(i,\{k\})p_{k,j}(u)p_{j,G}(t-(m+1)u)$$

$$=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{j\in K}f_l(i,\ \{j\})p_{j,G}(t-lu)$$

$$+\sum_{j\bar{\in} K}f_{m+1}(i,\{j\})p_{j,G}(t-(m+1)u).$$

这就证明了(3.11)。现在我们反复利用(3.11)来证明引理3.2。

(i) 在(3.11)中令$G=K$，$t=v$，$m=n_0$，$\left(\text{其中}n_0=\left[\frac{u}{v}\right]^{1)}\right)$

得：

$$p_{i,K}(v)\geqslant\sum_{l=1}^{n_0}\sum_{j\in K}f_l(i,\ \{j\})p_{j,K}(v-lu)$$

1) $[x]$表x的最大整数部份，即不大于x的最大整数。

$$\geqslant \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,j}(v - lu)$$

$$\geqslant \sum_{l=1}^{n_0} f_l(i, K)(1-\varepsilon).$$

所以

$$\sum_{l=1}^{n_0} f_l(i, K) \leqslant \frac{p_{i,K}(v)}{1-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \qquad (3.12)$$

(ii) 在(3.11)中令$G=\{i\}$，$t=mu$ $(1\leqslant m\leqslant n_0-1)$得

$$p_{i,\{i\}}(mu) \leqslant \sum_{l=1}^{m-1} f_l(i, K) + f_m(i, \{i\}), \qquad (3.13)$$

但是，由$1\leqslant m\leqslant n_0-1$得知

$$p_{i,\{i\}}(mu) > 1-\varepsilon, \qquad (3.14)$$

所以，由(3.12)，(3.13)，(3.14)得：

$$f_m(i, \{i\}) > (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}, \ (1\leqslant m\leqslant n_0-1). \qquad (3.15)$$

(iii) 在(3.11)中令$G=K$，$m=n_0$，$t=v$，则得：

$$p_{i,K}(v) \geqslant \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,K}(v - lu)$$

$$\geqslant (1-\varepsilon) \sum_{j \in K} f_1(i, \{j\})$$

$$+ \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,K}(v - lu)$$

$$= (1-\varepsilon) p_{i,K}(u) + \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,K}(v - lu)$$

$$\geqslant (1-\varepsilon) p_{i,K}(u)$$

$$+ \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_{l-1}(i, \{i\}) p_{i,j}(u) p_{j,K}(v - lu).$$

因此由(3.15)及引理的假设得：

$$p_{i;K}(v) \geqslant (1-\varepsilon)p_{j,K}(u) + \sum_{l=2}^{n_0} \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sum_{j\in K} p_{i,j}(u)$$

$$= (1-\varepsilon)p_{i,K}(u) + (n_0-1)(1-3\varepsilon)p_{i,K}(u).$$

所以

$$\frac{p_{i;K}(v)}{v} \geqslant (1-3\varepsilon)\frac{n_0 u}{v}\ \frac{p_{i,K}(u)}{u},$$

但是

$$\frac{n_0 u}{v} = \left[\frac{v}{u}\right]\frac{u}{v} \geqslant 1-\frac{u}{v} \geqslant 1-\varepsilon,$$

所以

$$(1-4\varepsilon)\frac{p_{i,K}(u)}{u} \leqslant \frac{p_{i,K}(v)}{v}.$$

定理3.4. 设$P(t)$是一个转概阵。任意固定$i\in E$，$J\in \mathscr{M}$，$i\notin J$，均有

(i) 当$K\subset J$时，$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}p_{i,K}(t)$ 存在，记此极限为 $q_{i,K}$则 $0\leqslant q_{i,K}<\infty$，而且此极限对$K\subset J$是一致地成立。

(ii) $q_{i,K}$对于$K\subset J$来说，具有完全可加性。

证 (i) 令$G=\{i\}\cup J$，则$G\in\mathscr{M}$，所以对任何$\varepsilon<\frac{1}{4}$，必存在一个$\tau=\tau(\varepsilon, G)$，使

$$1-p_{j,j}(t)<\varepsilon,\ (0\leqslant t\leqslant\tau,\ j\in G)$$

所以，由引理3.2得：

$$(1-4\varepsilon)\frac{p_{i,K}(u)}{u} \leqslant \frac{p_{i,K}(v)}{v},\ \left(\text{只要}0<v\leqslant\tau, 0<\frac{u}{v}\leqslant\varepsilon\right),$$

在上式中令$u\to 0^+$取上极限得：

$$(1-4\varepsilon)\limsup_{u\to 0^+}\frac{p_{i,K}(u)}{u} \leqslant \frac{p_{i,K}(v)}{v},\ (0<v\leqslant\tau), \tag{3.16}$$

所以，再把(3.16)对$v\to 0^+$取下极限并注意ε的任意性得知

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,K}(t)}{t}$$

存在，而且若记此极限为$q_{i,K}$，就有$0\leqslant q_{i,K}<\infty$。因此(3.16)化为

$$(1-4\varepsilon)q_{i,K}\leqslant\frac{p_{i,K}(v)}{v},\quad (0<v\leqslant\tau). \qquad (3.17)$$

显然，$q_{i,K}\leqslant q_{i,J}$，所以

$$\frac{p_{i,K}(v)}{v}-q_{i,K}\geqslant -4\varepsilon q_{i,J},\quad (0<v\leqslant\tau). \qquad (3.18)$$

但是K可以为J的任意子集。所以在(3.18)中以$J\setminus K$代K得：

$$\frac{p_{i,J}(v)-p_{i,K}(v)}{v}-(q_{i,J}-q_{i,K})\geqslant -4\varepsilon q_{i,J}.\quad (0<v\leqslant\tau).$$

即是

$$\frac{p_{i,K}(v)}{v}-q_{i,K}\leqslant\left(\frac{p_{i,J}(v)}{v}-q_{i,J}\right)+4\varepsilon q_{i,J},\quad (0<v\leqslant\tau). \qquad (3.19)$$

由(3.18)和(3.19)得：

$$\left|\frac{p_{i,K}(v)}{v}-q_{i,K}\right|\leqslant 4\varepsilon q_{i,J}+\left|\frac{q_{i,J}(v)}{v}-q_{i,J}\right|,\quad (0<v\leqslant\tau). \qquad (3.20)$$

(3.20)说明了

$$\lim_{v\to 0^+}\frac{p_{i,K}(v)}{v}=q_{i,K},\quad (\text{对}K\subset J\text{一致地成立}).$$

(ii) 显然，$q_{i,K}$对于$K\subset J$来说有有限可加性。若注意(3.17)，则对$K_n\subset J$，$K_n\downarrow\varnothing$来说，还有

$$\limsup_{n\to\infty} q_{i,K_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{p_{i,K_n}(v)}{v}=0.$$

所以$q_{i,K}$对$K\subset J$来说，有完全可加性。

系1. 若$i\neq j$，则

(i) $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}p_{i,j}(t)$存在，记此极限为$q_{i,j}$，这时$0\leqslant q_{i,j}<\infty$；

(ii) $\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leqslant q_i$，其中$q_i$的定义见定理3.3。

证 (i) 可以从定理3.4立即得到。

(ii) 取E中一串单调上升到E的子集J_n，而且取得J_n中恰有n个元素。由于

$$\frac{p_{i,i}(t)-1}{t}+\sum_{\substack{j\in J_n\\ j\neq i}}\frac{p_{i,j}(t)}{t}\leqslant 0.$$

所以，令$t\to 0^+$即得：

$$-q_i+\sum_{\substack{j\in J_n\\ j\neq i}} q_{i,j}\leqslant 0.$$

令$n\to\infty$得：$\sum_{j\neq i} q_{i,j}\leqslant q_i$。

定理3.5. 下列二条件等价：

(i) $\sup_{i\in E} q_i<\infty$；

(ii) $\lim_{t\to 0^+}\sup_{i\in E}(1-p_{i,i}(t))=0$。

若其中有一个条件满足，则

$$q_i=\sum_{j\neq i} q_{i,j},\quad (i\in E),$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i\text{对}i\in E\text{一致地成立。}$$

证 (i)⇒(ii)。设(i)成立。令$c=\sup_{i\in E} q_i<\infty$。由定理3.3有$p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_i t}$。所以

$$1-p_{i,i}(t)\leqslant q_i t\leqslant ct.$$

令$t\to 0^+$即得(ii)。

(ii)⇒(i)。设(ii)成立。取$K=E\setminus\{i\}$。由定理3.4知

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,K}(t)}{t}=q_{i,K} \tag{3.21}$$

存在，$0\leqslant q_{i,K}<\infty$。此即

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_{i,K}. \tag{3.22}$$

用定理3.4的(ii)有

$$q_{i,K}=\sum_{j\in K}q_{i,j}=\sum_{j\neq i}q_{i,j}.$$

但是，由定理3.3有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i,$$

所以 $q_i=\sum_{j\neq i}q_{i,j}<\infty$。

由于(ii) 成立，所以E的任何子集必属于引理3.2中的$\mathscr{M}$，而且任给$0<\varepsilon<\frac{1}{4}$，必存在一个$\tau=\tau(\varepsilon)>0$使得

$$1-p_{j,j}(t)<\varepsilon,\ (0\leqslant t\leqslant\tau,\ j\in E).$$

因此，由引理3.2得知：

$$(1-4\varepsilon)\frac{p_{i,K}(u)}{u}\leqslant\frac{p_{i,K}(v)}{v},\ \left(0<v\leqslant\tau,\ 0<\frac{u}{v}\leqslant\varepsilon\right),$$

令$u\to 0^+$并注意(3.21)得

$$(1-4\varepsilon)q_{i,K}\leqslant\frac{p_{i,K}(v)}{v}.\ (0<v\leqslant\tau) \tag{3.23}$$

所以$\sup\limits_{i\in E}q_i=\sup\limits_{i\in E}q_{i,K}\leqslant\frac{1}{(1-4\varepsilon)\tau}<\infty$。(i)成立。

又因为

$$p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_i t},$$

所以 $$q_i-\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}\geqslant 0.$$

但是，由(3.23)还有

$$q_i-\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}\leqslant 4\varepsilon q_i<\frac{4\varepsilon}{(1-4\varepsilon)\tau}.\ (0<t\leqslant\tau).$$

由于ε可以任意小，所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i,\text{（对}i\in E\text{一致地成立）。}$$

定理3.6. 设$P(t)$是一个转概阵。q_i，$q_{i,j}$的意义如前。记$q_{i,i}=-q_i$。固定任意一个$i\in E$。若$0\leqslant q_i<\infty$，则$p_{i,j}(t)$在$(0,\infty)$上有连续导数$p'_{i,j}(t)$，而且它满足：

(i) $\sum_{j\in E}|p'_{i,j}(t)|\leqslant 2q_i$，$(t\geqslant 0)$；

(ii) $\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)=0$，$(t>0)$；

(iii) $p'_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}p'_{i,k}(t)p_{k,j}(s)$，$(t>0,\ s\geqslant 0)$；

(iv) $\lim_{t\to 0^+}p'_{i,j}(t)=p'_{i,j}(0)=q_{i,j}$；

(v) $\lim_{t\to\infty}p'_{i,j}(t)=0$。

注意： 若$q_i=0$，则$p_{i,i}(t)\equiv 1$，$p_{i,j}(t)\equiv 0$，$(i\neq j)$，所以定理3.6中的全部结论显然成立。故以下恒设$0<q_i<\infty$。在证明定理3.6以前我们证明一些引理。

引理3.3. $e^{q_i t}p_{i,j}(t)$对t来说单调非降。

证 任取$s\geqslant 0$，$t\geqslant 0$。利用$(K-c)$方程式和$p_{i,i}(s)\geqslant e^{-q_i s}$即得：

$$e^{q_i(s+t)}p_{i,j}(s+t)\geqslant e^{q_i(s+t)}p_{i,i}(s)p_{i,j}(t)\geqslant e^{q_i t}p_{i,j}(t).$$

引理3.4. 设$f(x,\ y)$是一个二元的实变实值函数，固定y，$f(\cdot,\ y)$是x的勒贝格可测函数，固定x，$f(x,\ \cdot)$是y的右连续函数，则$f(x,\ y)$是$(x,\ y)$的二元勒贝格可测函数。

证 记χ_A是集合A上的示性函数。取$A_{n,k}=\left(\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right]$，

$g_n(x,\ y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(x,\ \frac{k+1}{n}\right)\chi_{A_{n,k}}(y)$则$g_n$是$(x,\ y)$的二元勒贝格可测函数，而且由$f(x,\ \cdot)$的右连续性得

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x,\ y)=f(x,\ y).$$

所以$f(x, y)$是(x, y)的二元勒贝格可测函数。

引理3.5. 在定理3.6的条件下，存在唯一一组连续函数$g_{i,j}(t)$，$(t\in[0, \infty))$，使得

$$p_{i,j}(t)=e^{-q_i t}\int_0^t q_i e^{q_i s} g_{i,j}(s)ds+e^{-q_i t}\delta_{i,j}, \qquad (3.24)$$

其中$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ 而且还满足：

(i) $g_{i,j}(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0)$，$\sum_{j\in E} g_{i,j}(t)\equiv 1$，$(t>0)$；

(ii) $g_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E} g_{i,k}(s)g_{k,j}(t)$，$(s>0,\ t\geqslant 0)$；

(iii) $\lim_{t\to 0^+} g_{i,j}(t)=\begin{cases}0, & j=i,\\ q_{i,j}/q_i, & j\neq i;\end{cases}$

(iV) $\lim_{t\to\infty} g_{i,j}(t)=\pi_{i,j}$，其中$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$。

证 下面分几步来证。

(I) 存在一组函数$r_{i,j}(t)$，$(t\geqslant 0)$，使得：

$$r_{i,j}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{j\in E} r_{i,j}(t)\equiv 1,\ (t\geqslant 0),\ \text{而且}$$

$$e^{q_i t}p_{i,j}(t)=\int_0^t q_i e^{q_i s} r_{i,j}(s)\,ds+\delta_{i,j}. \qquad (3.25)$$

事实上，由定理3.1及引理3.3得知：对任何$J\subset E$，$e^{q_i t}p_{i,J}(t)$对t来说单调非降而且绝对连续。所以存在勒贝格可测函数$r_{i,j}(t)$及$h_{i,j}(t)$使：

$$e^{q_i t}p_{i,j}(t)=\int_0^t q_i e^{q_i s} r_{i,j}(s)\,ds+\delta_{i,j}, \qquad (3.26)$$

$$e^{q_i t}p_{i,E-\{j\}}(t)=\int_0^t q_i e^{q_i s} h_{i,j}(s)ds+p_{i,E-\{j\}}(0), \qquad (3.27)$$

$$r_{i,j}\geqslant 0,\quad h_{i,j}\geqslant 0.$$

把上述两式相加得：

$$e^{q_i t} = \int_0^t q_i e^{q_i s}(r_{i,j}(s) + h_{i,j}(s))ds + 1$$

所以 $\quad r_{i,j}(s) + h_{i,j}(s) = 1,$ $\quad$ [$a.e.$]

因此，由$r_{i,j}(s) \geqslant 0$，$h_{i,j}(s) \geqslant 0$得：

$$0 \leqslant r_{i,j}(s) \leqslant 1. \qquad [a.e.]$$

不妨认为$0 \leqslant r_{i,j}(s) \leqslant 1$，$(s \geqslant 0)$。把(3.26)两边对$j$求和得：

$$\sum_{j \in E} r_{i,j}(t) = 1. \qquad [a.e.]$$

又不妨认为$\sum_{j \in E} r_{i,j}(t) \equiv 1$，$(t \geqslant 0)$。

(II) $g_{i,j}(t)$的定义。

以(3.26)代入

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \qquad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 0),$$

得：

$$q_i e^{-q_i(s+t)} \int_0^{s+t} e^{q_i u} r_{i,j}(u) du + e^{-q_i(s+t)} \delta_{i,j}$$

$$= \sum_{k \in E} q_i e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} r_{i,k}(u) p_{k,j}(t) du + e^{-q_i s} p_{i,j}(t),$$

再把 (3.26) 代入上式而得：

$$e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} \sum_{k \in E} r_{j,k}(u) p_{k,j}(t) du$$

$$= e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} r_{i,j}(u+t) du. \qquad (3.28)$$

因此，对于每一个 $t \geqslant 0$，存在一个勒贝格零测集 Y_t，(用μ_1表一维勒贝格测度，μ_2表二维勒贝格测度，) 使得：

$$r_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} r_{i,k}(s) p_{k,j}(t), (s \overline{\in} Y_t, t \geqslant 0), \qquad (3.29)$$

由于 (3.29)右端的级数每一项都是s的勒贝格可测函数(t固定)，

都是t的连续函数(s固定)，所以由引理3.4得知它是 (s, t) 的二元勒贝格可测函数，从而 (3.29) 右端的级数收敛到一个二元勒贝格可测函数。显然$r_{ij}(s+t)$也是(s,t)的二元勒贝格可测函数，所以

$$M=\left\{(s,t)\middle|s>0,t>0,r_{i,j}(s+t)\neq\sum_{k\in E}r_{i,k}(s)p_{k,j}(t),\right\}$$

是二维勒贝格可测集。再令$M_s\equiv\{t|t\geqslant 0, (s, t)\in M\}$，$M_t\equiv\{s|s\geqslant 0, (s, t)\in M\}$为$M$的两个截口。则利用富比尼定理及(3.29)得：

$$\mu_2(M)=\int_0^\infty\mu_1(M_s)ds=\int_0^\infty\mu_1(M_t)dt=0. \qquad (3.30)$$

作线性变换$u=s$，$v=s+t$，它把集合M变为N。由于线性变换是保测的，即$\mu_2(N)=\mu_2(M)=0$。由M的定义看出

$$N=\left\{(u,v)\middle|v>u>0,r_{i,j}(v)\neq\sum_{k\in E}r_{i,k}(u)p_{k,j}(v-u),\right\}.$$

记 $N_u=\{v|v>0, (u, v)\in N\}$ 为N的一个截口。由富比尼定理及$\mu_2(N)=0$得知：存在一个u的集合H，使得$\mu_1(H)=0$，$u\bar{\in}H$时$\mu_1(N_u)=0$。

定义$q_{i,j}(v)$如下：

当$v>0$时，取 $u'<v$，$u'\bar{\in}H$，令

$$q_{i,j}(v)=\sum_{k\in E}r_{i,k}(u')p_{k,j}(v-u'), \qquad (3.31)$$

当$v=0$时，令

$$q_{i,j}(0)=\lim_{v\to 0+}q_{i,j}(v)^{1)}. \qquad (3.32)$$

(III) 上面所定义的$q_{i,j}$即为所求。

首先我们证明上面所定义的$q_{i,j}$不依赖u'的选取。事实上，任取$u'<v$，$u''<v$，$v>0$，u'，$u''\bar{\in}H$固定，，则由H的定义有：

$$\sum_{k\in E}r_{i,k}(u')p_{k,j}(t-u')=r_{i,j}(t)$$

---

[1] 此极限的存在在以后证明 (iii) 的过程完成。

$$= \sum_{k \in E} r_{i,k}(u'')p_{k,j}(t-u''), \quad [a.e.],$$

在$(\max(u', u''), \infty)$中。但是上式左右两边都是t的连续函数（证明可仿照定理3.2。注意$p_{k,j}(t)$是连续函数）。因此，对一切$t>u'$，$t>u''$上式均成立。特别地

$$\sum_{k \in E} r_{i,k}(u')p_{k,j}(v-u') = \sum_{k \in E} r_{i,k}(u'')p_{k,j}(v-u'').$$

其次我们证明$g_{ij}(v)$在$[0, \infty)$上连续。（当然在$v=0$只要求右连续。）若注意$g_{i,j}(0)$的定义，则只需证明$g_{i,j}(v)$在$v>0$连续就可以了。事实上，任给$a>0$，当$v>a$时，

$$g_{i,j}(v) = \sum_{k \in E} r_{i,k}(a)p_{k,j}(v-a)$$

是v的连续函数。由a可以是任意正数得知$g_{i,j}(v)$在$v>0$连续。

最后我们证明$g_{i,j}(v)$满足(3.24)及(i)—(iv)。因为$r_{i,j}(v)$满足(3.24)而且由$g_{i,j}$的定义又有

$$g_{i,j}(v) = r_{i,j}(v), \qquad [a.e.].$$

所以$g_{i,j}(v)$满足(3.24)。现在我们逐一验证$g_{i,j}$满足(i)—(iv)。

(i) 由$g_{i,j}$的定义即得$g_{i,j}(v) \geqslant 0$，$(v \geqslant 0)$。由(3.31)得：

$$\sum_{j \in E} g_{i,j}(v) = \sum_{k \in E} r_{i,k}(u') \sum_{j \in E} p_{k,j}(v-u')$$

$$= \sum_{k \in E} r_{i,k}(u') = 1, \qquad (v>0).$$

(ii) 完全仿照得到(3.29)的办法可知：对于每一个$t \geqslant 0$，存在一个勒贝格零测集Z_t，使：

$$g_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t), \quad (s \bar{\in} Z_t, \ t \geqslant 0). \tag{3.33}$$

由于t固定时，(3.33)两边都是s的连续函数，(左边是s的连续函

数已知。至于右边，因为$\sum_{j\in E} g_{i,j}(v)\equiv 1$，$(v>0)$，$g_{i,j}(u)\geqslant 0$，$(v\geqslant 0)$，$g_{i,j}$连续，故由迪尼定理知对任何$b>a>0$，$\sum_{j\in E} g_{i,j}(v)$在$[a, b]$上一致收敛。更有$\sum_{h\in E} g_{i,h}(s)p_{h,j}(v)$在$s\in[a, b]$上一致收敛。而$g_{i,h}(s)p_{h,j}(t)$在$[a,b]$上是$s$的连续函数，所以$\sum_{h\in E} g_{i,h}(s)p_{h,j}(t)$在$[a, b]$上是$s$的连续函数。由于$b>a>0$可以是任意正数，所以(3.33)右边当$t\geqslant 0$固定时对$s$来说在$s>0$连续。）所以（3.33）对一切$s>0$，$t\geqslant 0$均成立。

(iii) 由(ii) 有

$$g_{i,j}(s+t)\geqslant g_{i,j}(s)p_{j,j}(t),\quad (s>0, t>0).$$

令$s\to 0+$得：

$$g_{i,j}(t)\geqslant \limsup_{s\to 0+} g_{i,j}(s)p_{j,j}(t),$$

令$t\to 0+$得：

$$\liminf_{t\to 0+} g_{i,j}(t)\geqslant \limsup_{s\to 0+} g_{i,j}(s).$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0+} g_{i,j}(t)$存在。

由（3.24）得：

$$\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=\frac{1-e^{-q_i t}}{t}-\frac{q_i e^{-q_i t}}{t}\int_0^t e^{q_i s}g_{i,i}(s)ds.$$

令$t\to 0+$得：

$$q_i=q_i-q_i\lim_{t\to 0+} g_{i,i}(t).$$

而$q_i>0$，所以$\lim\limits_{t\to 0+} g_{i,i}(t)=0$.

由（3.24）当$i\neq j$时有：

$$\frac{p_{i,j}(t)}{t}=q_i\frac{e^{-q_i t}}{t}\int_0^t e^{q_i s}g_{i,j}(s)ds.$$

令$t\to 0+$得：$q_{i,j}=q_i\lim\limits_{t\to 0+} g_{i,j}(t)$，即$\lim\limits_{t\to 0+} g_{i,j}(t)=\dfrac{q_{i,j}}{q_i}$.

(iV) 由(ii) 有

$$q_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t), \qquad (s>0, t\geqslant 0)。$$

若注意$\lim\limits_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=\pi_{ij}$存在，并仿照定理3.2，应用控制收敛定理可得：$\lim\limits_{t\to\infty} g_{i,j}(t)$存在。由（3.24）有

$$p_{i,j}(t)=q_i\int_0^t e^{-q_i(t-s)}g_{i,j}(s)ds+e^{-q_i t}\delta_{i,j}$$

$$=q_i\int_0^t e^{-q_i s}g_{i,j}(t-s)ds+e^{-q_i t}\delta_{i,j}。$$

令$t\to\infty$，得

$$\pi_{i,j}=q_i\int_0^\infty e^{-q_i s}\lim_{t\to\infty} g_{i,j}(t)ds=\lim_{t\to\infty} g_{i,j}(t)。$$

至于这样的$g_{i,j}$只有唯一一组，那是显然的事实。

现在我们利用以上各引理来证明定理3.6。由引理3.5立即得知$p_{i,j}(t)$ 在（0，∞）上有连续导数$p'_{ij}(t)$。现在我们逐一证明$p'_{i,j}(t)$满足定理3.6中的(i)—(V)。把（3.24）微商得：

$$q_i e^{q_i t}p_{i,j}(t)+e^{q_i t}p'_{i,j}(t)=q_i e^{q_i t}g_{i,j}(t)。(t>0) \tag{3.34}$$

(i) $\sum\limits_{j\in E}|p'_{i,j}(t)|\leqslant q_i\sum\limits_{j\in E}(q_{i,j}(t)+q_{i,j}(t))=2q_i。(t\geqslant 0)$

(ii) 当$t>0$时，

$$\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)=q_i\Big(\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)-\sum_{j\in E}g_{i,j}(t)\Big)=0。$$

(iii) 当$s>0$，$t\geqslant 0$时，有

$$q_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}(s)p_{k,j}(t),$$

$$p_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{i,k}(s)p_{k,j}(t),$$

两式相减并注意（3.34）得：

$$p'_{i,j}(s+t)=q_i(g_{i,j}(s+t)-p_{i,j}(s+t))$$

$$=q_i\sum_{k\in E}(g_{i,k}(s)-p_{i,k}(s))p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}p'_{i,k}(s)p_{k,j}(t)。$$

(iV) 由 (3.34) 得：

$$\lim_{t\to 0+}p'_{i,j}(t)=q_i(\lim_{t\to 0+}g_{i,j}(t)-\delta_{ij})$$

$$=\begin{cases}-q_i, & 若j=i,\\ q_{i,j} & 若j\neq i。\end{cases}$$

(V) 由 (3.34) 还有

$$\lim_{t\to\infty}p'_{i,j}(t)=\lim_{t\to\infty}q_i(g_{i,j}(t)-p_{i,j}(t))$$

$$=q_i(\pi_{i,j}-\pi_{i,j})=0。$$

定理3.7. 设$P(t)$是一个转概阵而且$q_i<\infty$。则下列二条件等价：

(i) $p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{kj}(t)$，$(t\geqslant 0,\ j\in E)$；

(ii) $\sum_{k\in E}q_{i,k}=0$。

证 (i)⇒(ii)。设(i)成立。则由定理3.6得：对$t>0$，有

$$0=\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)=\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{i,k}\sum_{j\in E}p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{i,k}。$$

(**注意**：上面的级数交换求和次序是合法的，因为它绝对收敛。)

(ii)⇒(i) 设 (ii) 成立。若$q_i=0$，则 (i) 显然成立。下设$0<q_i<\infty$。由引理3.5有

$$g_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}g_{i,k}(s)p_{k,j}(t),\quad(s>0,\ t\geqslant 0),$$

$$\lim_{s\to 0+} g_{i,k}(s) = \begin{cases} q_{i,k}/q_i, & k\neq i, \\ 0 & k=i, \end{cases}$$

$q_{i,j}(s)$在$[0,\ \infty)$上连续，$\sum\limits_{k\in E} g_{i,k}(s)\equiv 1$，$(s>0)$。而今(ii)成立，所以$\sum\limits_{k\in E}\lim\limits_{s\to 0+} g_{i,k}(s)=1$。因此，利用海莱定理（离散分布的情形）及（3.34）得：

$$\begin{aligned} p'_{i,j}(t) &= q_i(g_{i,j}(t)-p_{i,j}(t)) \\ &= q_i\Big(\lim_{s\to 0+}\sum_{k\in E} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t)-p_{i,j}(t)\Big). \\ &= q_i\Big(\sum_{k\in E}\lim_{s\to 0+} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t)-p_{i,j}(t)\Big) \\ &= q_i\Big(\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}p_{k,j}(t)-p_{i,j}(t)\Big) \\ &= \sum_{k\in E} q_{i,k}p_{k,j}(t), \qquad (t>0), \end{aligned}$$

而$t=0$时上式显然成立。(i)得证。

定理3.8. 设$P(t)$是一个转概阵，$\sup\limits_{i\in E} q_i<c$，记$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$，则

(i) $P'(t)=QP(t)=P(t)Q$，$(t\geqslant 0)$；

(ii) $P(t)=e^{Qt}$，$(t\geqslant 0)$；

(iii) $Q\Pi=\Pi Q=0$，其中$\Pi=\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$。

反之，任给一个矩阵$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$，只要$-\infty<q_{i,i}\leqslant 0$，$(i\in E)$，$0\leqslant q_{i,k}<\infty$，$(i\neq j,\ i,\ j\in E)$，$\sum\limits_{j\in E} q_{ij}=0$，$\sup\limits_{i\in E}(-q_{ii})<\infty$，则$P(t)=e^{Qt}$是一个转概阵。

证 (i) 因为$\sup\limits_{i\in E} q_i<c$，所以由定理3.5得

$$\sum_{j\in E} q_{i,j}=0,\quad (i\in E).$$

因此，由定理3.7得：$P'(t)=QP(t)$，$(t\geqslant 0)$。而对任何$t>0$，$0<h<t$，i，$j\in E$，有

$$\frac{p_{i,j}(t+h)-p_{i,j}(t)}{h}=\frac{\sum\limits_{k\in E}p_{i,k}(t)(p_{k,j}(h)-\delta_{k,j})}{h},$$

(3.35)

$$\frac{p_{i,j}(t)-p_{i,j}(t-h)}{h}=\frac{\sum\limits_{k\in E}p_{i,k}(t-h)(p_{k,j}(h)-\delta_{k,j})}{h}.$$

(3.36)

但是由定理3.5有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(h)}{h}=q_i,\quad (\text{对}i\in E\text{一致地成立}),$$

所以对任何给定的$\varepsilon>0$存在一个$h_0>0$（与k无关）使得：

$$\frac{1-p_{k,k}(h)}{h}<q_k+\varepsilon<c+\varepsilon,\ (k\in E,\ h<h_0),$$

(3.37)

更有

$$\frac{p_{k,j}(h)}{h}\leqslant\frac{1-p_{k,k}(h)}{h}<c+\varepsilon,\ (j\neq k,\ k,j\in E\ \ h\leqslant h_0),$$

(3.38)

因此，在（3.35），（3.36）中令$h\to 0+$，并利用控制收敛定理可得：

$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}p_{i,k}(t)q_{k,j}.\quad (t>0,\ i,j\in E).$$

显然上式对$t=0$也成立。这就证明了：

$$P'(t)=P(t)Q,\ (t\geqslant 0).$$

(ii) 因为

$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{k,j}(t),$$

而且由定理3.6有

$$\sum_{k\in E}|q_{i,k}p'_{k,j}(t)|\leqslant\sum_{k\in E}|q_{i,k}|2q_k\leqslant 4c^2,$$

所以 $$\sum_{k\in E}q_{i,k}p'_{k,j}(t)$$

在[0，∞）上一致收敛。因此，$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{k,j}(t)$ 可以逐项微商，微商之，得：

$$p''_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}p'_{k,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}\sum_{l\in E}q_{k,l}p_{l,j}(t).$$

即是

$$P''(t)=Q^2P(t),\quad (t\geqslant 0).$$

仿上，继续作下去，可以看出

$$\frac{d^n}{dt^n}P(t)=Q^nP(t),\quad (t\geqslant 0,\ n\geqslant 1).$$

因此

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{tQ^n}{n!}=e^{Qt}.$$

(iii) 因为

$$P'(t)=QP(t),\qquad \lim_{t\to\infty}P'(t)=0,$$

所以，若注意 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=\Pi$，并应用控制收敛定理即可得

$$0=Q\Pi.$$

又因为

$$P'(t)=P(t)Q,$$

若记

$$D_q=\mathrm{diag}(q_i,\ i\in E),\quad S=Q+D_q,$$

则用法都引理有：

$$O=\lim_{t\to\infty}\inf P'(t)\geqslant \Pi S-\Pi D_q.$$

但是 $\quad \sup_{i\in E} q_i < c$，

所以 $\quad Q1 = 0$。

因此 $\quad (\Pi S - \Pi D_q)1 = \Pi S1 - \Pi D_q 1$

$$= \Pi D_q 1 - \Pi D_q 1 = 0,$$

故 $\quad O = \Pi Q$。

现任给 $Q=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$，若Q满足定理3.8中的条件，往证$P(t)=e^{Qt}$是一个转概阵。显然$P(t)$满足$P(t)1=1$，$P(s+t)=P(s)P(t)$，$(0\leqslant s,\ t<\infty)$，$\lim_{t\to 0+} P(t)=P(0)=I$。下面证明$P(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0)$。事实上，若$q_{ij}>0$，$(i\neq j)$，则仿照定理2.1可以证明$P(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0)$。若$Q$不满足：$q_{ij}>0$，$(i\neq j)$。令

$$Q_n=(q_{i,j}^{(n)},\ i,\ j\in E),$$

$$q_{i,j}^{(n)}=q_{i,j}+\frac{a_{i,j}}{n},\ (i\neq j),\ a_{i,j}>0,$$

$$q_{i,i}^{(n)}=q_{i,i}-\frac{a_i}{n},$$

$$\sum_{j\neq i} a_{i,j}=a_i,\ a_i>0,\ \sup_{i\in E} a_i\leqslant d<1,$$

则Q_n是一个满足定理3.8中的 Q 所具有的一切条件的转强阵，因此，若令

$$P_n(t)=e^{Q_n t},$$

则有$P_n(t)\geqslant 0$。但是，$\lim_{n\to\infty} Q_n=Q$，所以

$$P(t)=\lim_{n\to\infty} P_n(t)\geqslant 0.$$

至此，定理3.8证毕。

§4. 准转概阵的分析理论

在§3中，我们详细地研究了转概阵的分析理论。现在我们问：转概阵的分析理论可否推广到准转概阵上去？再问：由于从

转概阵到准转概阵研究的对象已经扩大了，是否随之研究的问题也可以增多呢？两个问题的回答都是肯定的。

在这一节中，如果不特别声明，我们恒用$P(t)$表准转概阵，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,\ j\in E)$，$E$是一个可数集，$t\in \boldsymbol{T}=[0,\infty)$。

首先我们研究上面提出的第一个问题。研究这个问题的基础是下面的命题：

命题4.1. 设$P(t)$是一个准转概阵．作

$$\tilde{P}(t)=\begin{matrix} & \begin{matrix}\Delta & E\end{matrix} \\ \begin{matrix}\Delta \\ E\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 \\ d(t) & P(t)\end{pmatrix}\end{matrix},\quad d(t)=1-P(t)\mathbf{1},$$

即是把E扩充成$\tilde{E}=E\cup\{\Delta\}$，$\Delta$是不属于$E$的任何一个元素，定义$\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{i,j}(t),\ i,j\in\tilde{E})$，其中$\tilde{p}_{i,j}(t)=p_{i,j}(t)$，$(i,\ j\in E)$ $\tilde{p}_{\Delta,j}(t)=0$，$(j\in E)$，$\tilde{p}_{\Delta,\Delta}(t)=1$，$\tilde{p}_{i,\Delta}(t)=1-\sum\limits_{j\in E}p_{i,j}(t)$，$(i\in E)$，则$\tilde{P}(t)$是一个转概阵。（因此$d'(0)$存在，而且$0\leqslant d'(0)<\infty$。）

证 显然$0\leqslant\tilde{P}(t)$；$\tilde{P}(t)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}$．又因为

$$0\leqslant\tilde{p}_{i,\Delta}(t)=1-\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)\leqslant 1-p_{i,i}(t),\quad (i\in E),$$

而$\lim\limits_{t\to 0+}(1-p_{i,i}(t))=0$，所以$\lim\limits_{t\to 0+}\tilde{p}_{i,\Delta}(t)=0$，$(i\in E)$，再利用$P(t)$是一个准转概阵即可知$\lim\limits_{t\to 0+}\tilde{P}(t)=I$．最后，对任何$s\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，有

$$\tilde{P}(s)\tilde{P}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ d(s)+P(s)d(t) & P(s)P(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ d(s+t) & P(s+t)\end{pmatrix}=\tilde{P}(s+t).$$

所以$\tilde{P}(t)$是一个转概阵。

附注： $d(t)$对t单调非降。事实上，对任何$i\in E$，有$p_{i,\Delta}(s+t)\geqslant p_{i,\Delta}(s)p_{\Delta,\Delta}(t)=p_{i,\Delta}(s)$，$(s\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$。

基于命题4.1，对于准转概阵$P(t)$，我们有下列结果：（仍沿用§3的符号）

(I) $|p_{i,J}(t)-p_{i;J}(s)|\leqslant 1-p_{i,i}(|t-s|)$，$(i\in E,\ J\subset E,\ s,t\geqslant 0)$。

(II) $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$存在，记此极限为$\Pi$，还有$\Pi P(t)=P(t)\Pi=\Pi^2=\Pi$。

(III) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{t}(1-p_{i,i}(t))$存在，记此极限为$q_i$（或$-q_{i,i}$），还有$0\leqslant q_i\leqslant\infty$，$p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_it}$，$(i\in E,t\geqslant 0)$，($e^{-\infty}$定义为0)。特别地，若$q_i=0$，则$p_{i,i}(t)\equiv 1$，$p_{i,j}(t)\equiv 0$，$(j\neq i,\ j\in E)$。

(IV) 固定$i\in E$，$J\in\mathscr{A}$，$i\bar{\in}J$，均有：

(i) 当$K\subset J$时，$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{t}p_{i,K}(t)$存在，记此极限为$q_{i,K}$，则$0\leqslant q_{i,K}<\infty$，而且此极限对$K\subset J$是一致成立的。

(ii) $q_{i,K}$对$K\subset J$来说，有完全可加性。

系1. 若$i\neq j$，则

(i) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{p_{i;j}(t)}{t}$存在，记此极限为$q_{i;j}$，这时$0\leqslant q_{i,j}<\infty$，

(ii) $\sum\limits_{j\neq i}q_{i,j}\leqslant q_i$。

上述四定理可以直接从命题4.1及§3的定理3.1—3.4得到。

(V) 下面两个条件等价：

(i) $\sup\limits_{i\in E}q_i<\infty$；

(ii) $\lim\limits_{t\to 0+}\sup\limits_{i\in E}(1-p_{i,i}(t))=0$。

如果上述条件中有一个成立，则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i,\ （对i\in E一致地成立），$$

而且还有

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}} q_{i,j}=\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}\frac{p_{i,j}(t)}{t},\quad (i\in E).$$

证 (i)$\Longleftrightarrow$(ii)由定理3.5及命题4.1立刻可以得到．若(i)满足，由$q_\Delta=0$得知$\sup\limits_{i\in E} q_i<\infty$，所以由定理3.5得：

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i,\ (\text{对}i\in \tilde{E}\text{一致地成立}),$$

$$q_i=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in\tilde{E}}} q_{i,j},\quad i\in\tilde{E}.$$

所以对任何$i\in E$，有：

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}} q_{i,j}=q_i-q_{i,\Delta}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}-\frac{1-\sum\limits_{j\in E}p_{i,j}(t)}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}\frac{p_{i,j}(t)}{t}.$$

(VI) 固定 $i\in E$，设 $0<q_i<\infty$，则有：唯一一组 $g_{i,j}(t)$，$(t\geqslant 0,\ j\in E)$，它在$[0,\ \infty)$上连续，使得

$$p_{i,j}(t)=q_ie^{-q_it}\int_0^t e^{q_is}g_{i,j}(s)ds+e^{-q_it}\delta_{i,j},(j\in E,t\geqslant 0).$$

此外它还满足：

(i) $g_{i,j}(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0,\ j\in E)$，$\sum\limits_{j\in E} g_{i,j}(t)\leqslant 1$，$(t>0)$；

(ii) $g_{i,j}(s+t)=\sum\limits_{k\in E} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$，$(s>0,\ t\geqslant 0,\ j\in E)$；

(iii) $\lim\limits_{t\to 0+} g_{i,j}(t)=\begin{cases}0, & j\in E,\ j=i,\\ q_{i,j}/q_i, & j\in E,\ j\neq i;\end{cases}$

(iv) $\lim\limits_{t\to\infty} g_{i,j}(t)=\pi_{i,j}$，$(j\in E)$，其中$\pi_{i,j}=\lim\limits_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$．因此，$p_{i,j}(t)$在$(0,\ \infty)$上有连续导数$p'_{i,j}(t)$，它可以表为

$$p'_{i,j}(t)=q_i g_{i,j}(t)-q_i p_{i,j}(t).$$

由此式及$g_{i,j}$的性质我们还可以得出$p'_{i,j}(t)$满足：

(i) $\sum_{j\in E}|p'_{i,j}(t)|\leqslant 2q_i$，$(t\geqslant 0)$；

(ii) $\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)\leqslant 0$，$(t>0)$；

(iii) $\sum_{k\in E}p'_{i,k}(s)p_{k,j}(t)=p'_{i,j}(s+t)$，$(j\in E,\ s>0,\ t\geqslant 0)$；

(iv) $\lim_{t\to 0+}p'_{i,j}(t)=p'_{i,j}(0)=q_{i,j}$，$(j\in E)$；

(v) $\lim_{t\to\infty}p'_{i,j}(t)=0$，$(j\in E)$。

证 除了$p'_{i,j}(t)$满足(iii)和(ii)须要简单说明一下以外，其它诸结论均可从引理3.5，定理3.6及命题4.1直接得到。

因为$i\in E$时，由定理3.6有

$$p'_{i,\Delta}(t)+\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)=0,\ p'_{i,\Delta}(t)\geqslant 0,\ (t>0),$$

所以(ii)得证。至于(iii)，注意当$j\in E$时$p_{\Delta,j}(t)\equiv 0$，则有

$$p'_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}p'_{i,k}(s)p_{k,j}(t)+p'_{i,\Delta}(s)p_{\Delta,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}p'_{i,k}(s)p_{k,j}(t),\ (s>0,\ t\geqslant 0).$$

(VII) 固定$i\in E$，设$q_i<\infty$，则下列两命题等价：

(i) $p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{k,j}(t)$，$(t\geqslant 0,\ j\in E)$；

(ii) $\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}q_{i,j}=\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}\frac{p_{i,j}(t)}{t}$.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。设(i)成立。把(i)对$j\in E$求和并注意$t>0$时 $p'_{i,\Delta}(t)+\sum_{j\in E}p'_{i,j}(t)=0$得：

$$-p'_{i,\Delta}(t)=\sum_{k\in E}q_{i,k}(1-p_{k,\Delta}(t)),\quad (t>0).$$

令$t\to 0+$得：

$$-q_{i,\Delta}=\sum_{k\in E}q_{i,k}.$$

所以

$$\sum_{\substack{j\in E\\ j\neq i}}q_{i,j}=q_i-q_{i,\Delta}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{(1-p_{i,i}(t))-\left(1-\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)\right)}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sum\limits_{\substack{j\in E\\ j\neq i}}p_{i,j}(t)}{t}.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i)。设(ii)成立。即是

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}q_{i,j}=-q_{i,i}-q_{i,\Delta},$$

亦即 $$\sum_{j\in\tilde{E}}q_{i,j}=0.$$

所以由定理3.7有

$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in\tilde{E}}q_{i,k}\,p_{k,j}(t),\quad (t\geqslant 0,\ i,j\in\tilde{E}).$$

但$p_{\Delta,j}(t)\equiv 0$ $(j\in E,\ t\geqslant 0)$。故(ii)成立。

(VIII) 假定$\sup\limits_{i\in E}q_i<\infty$，则

(i) $P'(t)=QP(t)=P(t)Q$，$(t\geqslant 0)$；

(ii) $P(t)=e^{Qt}$，$(t\geqslant 0)$；

(iii) $\Pi Q=Q\Pi=0$。

反之，任给一个转强阵$Q=(q_{ij},\ i,j\in E)$（所谓Q是转强阵，意即$-\infty<q_{ii}\leqslant 0$，$(i\in E)$，$0\leqslant q_{ij}<\infty$，$(i\neq j,\ i,j,\in E)Q1\leqslant 0$。

特别地若还有$Q1=0$，则称此转强阵是保守的），若$\sup\limits_{i\in E}(-q_{ii})<\infty$，则$e^{Qt}$是一个准转概阵。

证 如命题4.1一样，作转概阵

$$\tilde{P}(t)=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 1 & 0 \\ E & d(t) & P(t) \end{matrix}, \quad d(t)=1-P(t)1.$$

令$\tilde{Q}=\tilde{P}'(0)$，则

$$\tilde{Q}=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 0 & 0 \\ E & d(0) & Q \end{matrix}.$$

由定理3.8有

(i) $\tilde{P}'(t)=\tilde{Q}\tilde{P}(t)=\tilde{P}(t)\tilde{Q}$，$(t\geqslant 0)$，

更有 $P'(t)=QP(t)=P(t)Q$。

$$\text{(ii)}\quad \tilde{P}(t)=e^{\tilde{Q}t}=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 1 & 0 \\ E & M & e^{Qt} \end{matrix},$$

更有 $P(t)=e^{Qt}$。

(iii) $\tilde{\Pi}\tilde{Q}=\tilde{Q}\tilde{\Pi}=0$，其中

$$\tilde{\Pi}=\lim_{t\to\infty}\tilde{P}(t)=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 1 & 0 \\ E & N & \Pi \end{matrix},$$

所以 $\Pi Q=Q\Pi=0$。

反之，任给一个转强阵$Q=(q_{ij},\ i,j\in E)$，满足$\sup\limits_{i\in E}(-q_{ii})<\infty$。作

$$\tilde{Q}=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 0 & 0 \\ E & -Q1 & Q \end{matrix}.$$

则$\tilde{Q}$是一个保守的转强阵，而且若记$\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij},\ i,j\in\bar{E})$，则有

$\sup_{i\in E}(-\tilde{q}_{i,i})<\infty$。所以由定理3.8得知$e^{\tilde{Q}t}$是一个转概阵。但是

$$e^{\tilde{Q}t} = \begin{matrix} & \begin{matrix}\Delta & E\end{matrix} \\ \begin{matrix}\Delta \\ E\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 \\ T & e^{Qt}\end{pmatrix}\end{matrix},$$

所以 e^{Qt}是一个准转概阵。

前面我们都是从准转概阵（或者转概阵）出发，来讨论它的连续性、可微性及其微商的性质……等等。但是在不少实际问题（例如排队论）中，转概阵往往事先不知道，而只知道其转强阵$Q\equiv P'(0)$。这就给我们提出了问题：给定任何一个转强阵 Q，是否恒存在一个转概阵（或准转概阵）$P(t)$，使得 $P'(0)=Q$？这种转概阵（或准转概阵）是否唯一？如果不唯一，其全体如何构造？下面我们就来讨论这些问题。

定义4.1. 给定一个转强阵Q。称准转概阵 $P(t)$是一个Q—过程，如果它满足$P'(0)=Q$。特别地，若$P(t)$还满足$P(t)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}$，即是说$P(t)$还是一个转概阵，则称$P(t)$是一个不间断的（简称不断的）$Q$—过程，反之就称为间断的。若 $P(t)=QP(t)$，$(t\geqslant0)$，则称$P(t)$ 满足倒退方程式，简称满足（B）；若 $P'(t)=P(t)Q$，$(t\geqslant0)$，则称$P(t)$满足前进方程式，简称满足(F)。

定理4.1. 设Q是一个转强阵，$P(t)$ 是一个Q—过程，则有：

(i) $P'(t)\geqslant QP(t)$，$(t\geqslant0)$；

(ii) $P'(t)\geqslant P(t)Q$，$(t\geqslant0)$，

和

(i)′ $P(t)\geqslant \Delta(t)+\int_0^t\Delta(t-s)SP(s)ds$；

(ii)′ $P(t)\geqslant\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)\ (D_qP(s)+P(s)S-P(s)D_q)$

$\cdot ds$。其中 $D_q=\mathrm{diag}(q_i,\ i\in E)$，$(q_i=-q_{i,i})$，$S=Q+D_q$，$\Delta(t)=\mathrm{diag}(e^{-q_it},\ i\in E)$。

证 因为

$$\frac{P(s+t)-P(t)}{s}=\frac{P(s)-I}{s}P(t)=P(t)\frac{P(s)-I}{s},$$

令$s\to 0+$，并利用法都引理即得(i)和(ii)。

用分部积分得：

$$\int_0^t \Delta(t-s)P'(s)ds$$

$$=P(t)-\Delta(t)-\int_0^t D_q\Delta(t-s)P(s)ds$$

$$=P(t)-\Delta(t)-\int_0^t \Delta(t-s)D_qP(s)ds,$$

所以

$$P(t)=\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)(P'(s)+D_qP(s))ds. \tag{4.1}$$

用(i)得：

$$P(t)\geqslant\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)(QP(s)+D_qP(s))ds$$

$$=\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)SP(s)ds. \tag{4.2}$$

此即(i)′.

利用(4.1)及(ii)得：

$$P(t)\geqslant\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)(D_qP(s)+P(s)S-P(s)D_q)ds, \tag{4.3}$$

此即(ii)′成立。

定理4.2. 设Q是一个转强阵，$P(t)$是一个Q—过程．则下列三条件等价：

(B) $P'(t)=QP(t)$，$(t\geqslant 0)$；

(B)′ $P(t)=\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)SP(s)ds$，$(t\geqslant 0)$；

(B_λ) $(\lambda I-Q)R(\lambda)=I$，$(\lambda>0)$，

其中

$$R(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P(t)dt \qquad (\lambda>0)$$

为$P(t)$的拉氏变换。

类似地，下列三条件等价：

(F) $P'(t)=P(t)Q$，$(t\geqslant 0)$；

(F′) $P(t)=\Delta(t)+\int_0^t\Delta(t-s)(D_qP(s)+P(s)S$

$$-P(s)D_q)ds,\ (t\geqslant 0);$$

(F_λ) $R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$，$(\lambda>0)$。

证 由(4.1)立即看出 $(B)\Longleftrightarrow(B)'$，$(F)\Longleftrightarrow(F)'$。下面我们证明$(F)'\Longleftrightarrow(F_\lambda)$。(类似地可以证明$(B)'\Longleftrightarrow(B_\lambda)$。)容易算出$\Delta(t)$的拉氏变换为$(\lambda I+D_q)^{-1}$。又

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt\int_0^t\Delta(t-s)(D_qP(s)+P(s)S-P(s)D_q)ds$$

$$=\int_0^{\infty}ds\int_s^{\infty}e^{-\lambda t}\Delta(t-s)dt\ \ (P(s)S+D_qP(s)-P(s)D_q)$$

$$=\int_0^{\infty}ds\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}\Delta(t)dt(P(s)S+D_qP(s)-P(s)D_q)$$

$$=\int_0^{\infty}ds(\lambda I+D_q)^{-1}(P(s)S+D_qP(s)-P(s)D_q)e^{-\lambda s}$$

$$=(\lambda I+D_q)^{-1}(R(\lambda)S+D_qR(\lambda)-R(\lambda)D_q).$$

所以

$$P(t)-\Delta(t)-\int_0^t\Delta(t-s)(D_qP(s)+P(s)S-P(s)D_q)ds$$

的拉氏变换为

$$R(\lambda)-(\lambda I+D_q)^{-1}-(\lambda I+D_q)^{-1}(R(\lambda)S$$
$$+D_qR(\lambda)-R(\lambda)D_q)$$
$$=(\lambda I+D_q)^{-1}(R(\lambda)(\lambda I-Q)-I).$$

所以，由拉氏变换的唯一性得知：

$$P(t)=\Delta(t)+\int_0^t\Delta(t-s)(D_qP(s)+P(s)S-P(s)D_q)ds, \quad [a.e] \qquad (4.4)$$

的充要条件是

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I, \qquad (\lambda>0).$$

但是(4.4)左，右两边都对t连续，所以$(F)'\Longleftrightarrow(F_\lambda)$。

定理4.3.（存在性定理）。任意给定一个转强阵Q,必存在一个Q—过程$\bar{P}(t)$，它满足(B)与(F),而且对任何Q—过程$P(t)$来说，恒有$P(t)\geqslant\bar{P}(t)$，$(t\geqslant0)$。

证 令D_q、S、$\Delta(t)$之意义如定理4.1。显然$S\geqslant0$。定义$P_0(t)=\Delta(t)$，对$n\geqslant1$，令

$$P_n(t)=\int_0^t\Delta(t-s)SP_{n-1}(s)ds,$$

$$\bar{P}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t).$$

往证$\bar{P}(t)$即为所求。

(1) 首先证明$\bar{P}(t)$是一个准转概阵。由于对一切$n\geqslant0$,$P_n(t)\geqslant0$，所以$\bar{P}(t)\geqslant0$。对n作归纳法可以证明：对任何$n\geqslant0$，有$\sum_{k=0}^{n}P_k(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$，从而$\bar{P}(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$。事实上，显然有$P_0(t)\mathbf{1}=\Delta(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$。设$\sum_{k=0}^{n}P_k(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$,则

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+1}P_k(t)\mathbf{1}\\&=P_0(t)\mathbf{1}+\int_0^t\Delta(t-s)S\sum_{k=0}^{n}P_k(s)\mathbf{1}\,ds\\&\leqslant P_0(t)\mathbf{1}+\int_0^t\Delta(t-s)S\mathbf{1}\,ds.\end{aligned}$$

再注意$Q\mathbf{1}\leqslant0$，$S=Q+D_q$，则得：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+1}P_k(t)\mathbf{1}\leqslant P_0(t)\mathbf{1}+\int_0^t\Delta(t-s)D_q\mathbf{1}\,ds\\&=\Delta(t)\mathbf{1}+\mathbf{1}-\Delta(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}.\end{aligned}$$

至此，归纳法完成了。下面证明$\bar{P}(t)$满足$(K-c)$方程式：$\bar{P}(s+t)=\bar{P}(s)\bar{P}(t)$，$(s\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$。为此，我们先对$n$作归纳法来证明：对任何$n\geqslant 0$，有 $P_n(s+t)=\sum_{k=0}^{n} P_k(s)P_{n-k}(t)$，$(s\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$。事实上，当$n=0$时，$P_0(s+t)=\Delta(s+t)=\Delta(s)\Delta(t)=P_0(s)P_0(t)$。今设对$n$上述等式成立，则

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(s+t) &= \int_0^{s+t} \Delta(s+t-u)S\,P_n(u)du \\
&= \int_0^{s+t} \Delta(s)\Delta(t-u)S\,P_n(u)du \\
&= \int_0^{t} \Delta(s)\Delta(t-u)S\,P_n(u)du \\
&\quad + \int_0^{s} \Delta(s-u)S\,P_n(u+t)du \\
&= \Delta(s)\int_0^{t} \Delta(t-u)S\,P_n(u)du \\
&\quad + \int_0^{s} \Delta(s-u)S \sum_{k=0}^{n} P_k(u)P_{n-k}(t)du \\
&= P_0(s)P_{n+1}(t) + \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{s} \Delta(s-u)S\,P_k(u)du\right)P_{n-k}(t) \\
&= P_0(s)P_{n+1}(t) + \sum_{k=0}^{n} P_{k+1}(s)P_{n-k}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} P_k(s)P_{n+1-k}(t).
\end{aligned}
$$

利用上述等式立即得：

$$
\begin{aligned}
\bar{P}(s+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s+t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P_k(s)P_{n-k}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(s) \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}(t)
\end{aligned}
$$

$$=\bar{P}(s)\bar{P}(t), \qquad (s\geqslant 0,\ t\geqslant 0).$$

现在我们证明 $\lim\limits_{t\to 0+}\bar{P}(t)=\bar{P}(0)=I$。因为

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t)=\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)S\sum_{k=0}^{n-1}P_k(s)ds,$$

令 $n\to\infty$ 即得：

$$\bar{P}(t)=\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)\,S\bar{P}(s)ds. \qquad (4.5)$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0+}\bar{P}(t)=\bar{P}(0)=I$。至此，我们证明了 $\bar{P}(t)$ 是一个准转概阵。

(2) 其次我们证明：$\bar{P}'(0)=Q$。事实上，

$$\frac{\bar{P}(t)-I}{t}=\frac{\Delta(t)-I}{t}+\frac{1}{t}\int_0^t \Delta(t-s)S\bar{P}(s)ds,$$

令 $t\to 0+$，上式右方趋于 $-D_q+S=Q$。

(3) 再次，我们证明对任何Q—过程$P(t)$来说，恒有$P(t)\geqslant \bar{P}(t)$。记 $P(t)=(p_{i,j}(t),i,j\in E)$。由于 $p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_i t}$，所以 $P(t)\geqslant P_0(t)$。今设

$$P(t)\geqslant \sum_{k=0}^{n} P_k(t),$$

则由定理4.1有

$$\begin{aligned}P(t)&\geqslant\Delta(t)+\int_0^t \Delta(t-s)S\,P(s)ds\\&\geqslant P_0(t)+\int_0^t \Delta(t-s)S\sum_{k=0}^{n}P_k(s)\ ds\\&=\sum_{k=0}^{n+1}P_k(s).\end{aligned}$$

所以对任何$n\geqslant 0$，恒有 $P(t)\geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(t)$，从而$P(t)\geqslant \bar{P}(t)$。

(4) 最后我们证明 $\overline{P}(t)$ 满足(B) 及(F)。

事实上，由(4.5) 和定理4.2立即得到 $\overline{P}(t)$ 满足(B)。至于(F)，令 $\overline{R}(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ 分别为$\overline{P}(t)$, $P_n(t)$ 的拉氏变换。容易算出 $R_0(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}$, $R_n(\lambda)=\Pi(\lambda)R_{n-1}(\lambda)$, $(n\geqslant 1)$，其中 $\Pi(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}S$. 所以 $\overline{P}(t)$的拉氏变换为

$$\begin{aligned}\overline{R}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\lambda)\ (\lambda I+D_q)^{-1}\\&=(\lambda I+D_q)^{-1}\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^n(\lambda)\ (\lambda I+D_q)^{-1}S(\lambda I+D_q)^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$\overline{R}(\lambda)(\lambda I+D_q)=I+\overline{R}(\lambda)S.$$

亦即$\overline{R}(\lambda)(\lambda I-Q)=I$。此即 $\overline{R}(\lambda)$满足(F_λ)，所以由定理4.2得知$\overline{P}(t)$满足(F)。至此，定理4.3证毕。

定理4.4. 给定保守的转强阵Q. 记 $\overline{y}(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\overline{R}(\lambda)\mathbf{1}$，则

(i) 当$n\to\infty$ 时，$\Pi^n(\lambda)\mathbf{1}$单调下降到 $\overline{y}(\lambda)$；

(ii) $\overline{y}(\lambda)$ 是«$\Pi(\lambda)y=y$, $0\leqslant y\leqslant \mathbf{1}$»的最大解；

(iii) $\overline{y}(\lambda)=0$ 的充要条件是：

«$(\lambda I-Q)y=0$, $0\leqslant y\leqslant\mathbf{1}$»仅有零解。

证 (i) 令 $S_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}R_k(\lambda)$, 则

$$S_n(\lambda)=R_0(\lambda)+(I+\Pi(\lambda)+\cdots+\Pi^{n-1}(\lambda))(\lambda I+D_q)^{-1}S(\lambda I+D_q)^{-1},$$

所以 $S_n(\lambda)(\lambda I+D_q)=I+S_{n-1}(\lambda)S$.

若注意 $Q\mathbf{1}=0$, $Q=S-D_q$，则得：

$$\lambda S_n(\lambda)\mathbf{1}+S_n(\lambda)D_q\mathbf{1}=\mathbf{1}+S_{n-1}(\lambda)S\mathbf{1}=\mathbf{1}+S_{n-1}(\lambda)D_q\mathbf{1}. \tag{4.6}$$

故 $S_n(\lambda)D_q\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}+S_{n-1}(\lambda)D_q\mathbf{1}$.

而 $S_0(\lambda)D_q\mathbf{1} = R_0(\lambda)D_q\mathbf{1} = (\lambda I + D_q)^{-1}D_q\mathbf{1} < \infty$,

所以，对一切 $n \geqslant 0$，有

$$S_n(\lambda)D_q\mathbf{1} < \infty.$$

因此，可以在（4.6）左，右两边减去 $S_{n-1}(\lambda)D_q\mathbf{1}$，减去以后得：

$$\lambda S_n(\lambda)\mathbf{1} + R_n(\lambda)D_q\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

即 $\lambda S_n(\lambda)\mathbf{1} + \Pi^n(\lambda)(\lambda I + D_q)^{-1}D_q\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

但是 $S\mathbf{1} = D_q\mathbf{1}$,

所以 $\lambda S_n(\lambda)\mathbf{1} + \Pi^n(\lambda)(\lambda I + D_q)^{-1}S\mathbf{1} = \mathbf{1}$,

即是 $\lambda S_n(\lambda)\mathbf{1} + \Pi^{n+1}(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}$,

亦即 $\Pi^{n+1}(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \lambda S_n(\lambda)\mathbf{1}$. （4.7）

但是 $n \to \infty$ 时，$S_n(\lambda)$ 单调上升到 $\bar{R}(\lambda)$，所以由（4.7）看出：$n \to \infty$ 时 $\Pi^n(\lambda)\mathbf{1}$ 单调下降到 $\bar{y}(\lambda)$。

(ii) 由(i)有

$$\Pi(\lambda)\bar{y}(\lambda) = \Pi(\lambda)\lim_{n\to\infty}\Pi^n(\lambda)\mathbf{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Pi^{n+1}(\lambda)\mathbf{1} = \bar{y}(\lambda).$$

显然 $\bar{y}(\lambda) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\mathbf{1} - P(t)\mathbf{1})dt$,

所以 $0 \leqslant \bar{y}(\lambda) \leqslant \mathbf{1}$。这就证明了 $\bar{y}(\lambda)$ 是

《$\Pi(\lambda)y = y$，$0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$》

的一个解。今设 y 为另一解，则 $0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$，$\Pi(\lambda)y = y$，故 $y = \Pi^n(\lambda)y \leqslant \Pi^n(\lambda)\mathbf{1}$，令 $n \to \infty$ 即得

$$y \leqslant \bar{y}(\lambda).$$

故 $\bar{y}(\lambda)$是最大解。

(iii) 由(ii)得知：$\bar{y}(\lambda) = 0$ 的充要条件是《$\Pi(\lambda)y = y, 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$》只有零解。而$\Pi(\lambda) = (\lambda I + D_q)^{-1}S$，所以当$0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$时，有：

$\Pi(\lambda)y = y \iff Sy = (\lambda I + D_q)y \iff (\lambda I - Q)y = 0$。这就证明了(iii)。

定理4.5.给定保守的转强阵Q.恰有唯一一个Q—过程的充要条件是：

$$\langle(\lambda I-Q)y=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\rangle$$

只有零解。

证 由定理4.4立即可得。

定义4.2. 称转强阵Q是有法的，如果$\bar{P}(t)1=1$.

定理4.6. 设Q是一个转强阵，则

(i) Q有法$\Rightarrow Q$—过程唯一；

(ii) Q有法$\Longleftrightarrow \bar{y}(\lambda)=0$；

(iii) Q有法$\Rightarrow Q$是保守的。

证 (i) 因为$\bar{P}(t)$是最小的Q—过程，所以由Q有法可推出Q—过程是唯一的。

(ii) 因为

$$\bar{y}(\lambda)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(1-\bar{P}(t)1)dt,$$

所以

$$\bar{y}(\lambda)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (1-\bar{P}(t)1)=0,\ [a.e.],$$

但是 $1-\bar{P}(t)1$ 对t连续，所以

$$\bar{y}(\lambda)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \bar{P}(t)1=1.$$

(iii) 若Q是有法的，则 $\bar{P}(t)$ 是转概阵，而且 $\bar{P}'(0)=Q$, $\bar{P}(t)$ 满足(B)，所以由定理3.7得知 $Q1=0$。即是Q是保守的。

上面我们证明了对任意转强阵Q来说，其Q—过程的存在性，及对保守的转强阵Q来说，其Q—过程唯一的充要条件。下面我们将要给出对任意转强阵Q来说，其Q—过程唯一的充要条件，以及当Q—过程不唯一时如何构造它们。

先研究两个空间：

$$\mathscr{L}_\lambda=\{a':a'\in(l),\ a'\geqslant 0,\ a'(\lambda I-Q)=0\},\ \lambda>0;$$

$$\mathscr{M}_\lambda=\{y:y\in(m),\ y\geqslant 0,\ (\lambda I-Q)y=0\},\ \lambda>0.$$

其中(l)、(m)如第一篇代表定义在E上的满足下述条件的全体行、

列向量：

$$\alpha' = (\alpha_i,\ i \in E) \in (l) \Longleftrightarrow \sum_{i \in E} |\alpha_i| < \infty,$$

$$y = \binom{y_i}{i \in E} \in (m) \Longleftrightarrow \sup_{i \in E} |y_i| < \infty.$$

以后我们把Q—过程$P(t)$的拉氏变换$R(\lambda)$也称作Q—过程。

命题4.2. 对任何转强阵Q有：

(1) $\alpha' \geqslant 0$, $\alpha'(\lambda I - Q) \geqslant \beta' \geqslant 0 \Rightarrow \alpha' \geqslant \beta' \overline{R}(\lambda)$;

(2) $y \geqslant 0$, $(\lambda I - Q) y \geqslant z \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant \overline{R}(\lambda) z$.

证 (1) 由$\alpha' \geqslant 0$, $\alpha'(\lambda I - Q) \geqslant \beta' \geqslant 0$得：

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geqslant \beta' + \alpha' S = \beta' + \alpha'(\lambda I + D_q)\Pi(\lambda).$$

反复地利用上述不等式得：

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geqslant \beta'$$

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geqslant \beta' + \beta' \Pi(\lambda),$$

……

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \beta' \Pi^k(\lambda),\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

故$\alpha' \geqslant \sum_{k=0}^{n} \beta' R_k(\lambda)$, 令$n \to \infty$即得$\alpha' \geqslant \beta' \overline{R}(\lambda)$.

(2) 由$y \geqslant 0$, $(\lambda I - Q) y \geqslant z \geqslant 0$得：

$$(\lambda I + D_q) y \geqslant z + S y = z + (\lambda I + D_q)\Pi(\lambda) y,$$

仿(1)可证$y \geqslant \overline{R}(\lambda) z$.

记$A(\mu,\ \lambda) = I + (\mu - \lambda)\overline{R}(\lambda)$, $(\lambda,\ \mu > 0)$. (4.8)

注意：此处及此篇剩余部份希文α, β, …上加一撇“$'$”代表行向量，而 $P'(t)$ 则往往代表微商，请根据上下文判别它们的含义.

命题4.3. (1) $\alpha' \in \mathscr{L}_\lambda \Rightarrow \alpha' A(\lambda,\ \mu) \in \mathscr{L}_\mu$;

(2) $y \in \mathscr{M}_\lambda \Rightarrow A(\lambda,\ \mu) y \in \mathscr{M}_\mu$.

证 只证一条，其余类似。设$y \in \mathscr{M}_\lambda$. 首先证明$A(\lambda, \mu) y \geqslant 0$.

事实上，当$\lambda\geqslant\mu$，有$A(\lambda,\ \mu)y=[I+(\lambda-\mu)\overline{R}(\mu)]y\geqslant0$；当$\lambda<\mu$，由$(\lambda I-Q)y=0$得$(\mu I-Q)y=(\mu-\lambda)y\geqslant0$，又因为$y\geqslant0$，所以用命题4.2得：$y\geqslant\overline{R}(\mu)(\mu-\lambda)y$，因此

$$A(\lambda,\ \mu)y=y+(\lambda-\mu)\overline{R}(\mu)y\geqslant0.$$

其次，若注意$A(\lambda,\ \mu)=I+(\lambda-\mu)\overline{R}(\lambda)$，$y\in(m)$，$\lambda\overline{R}(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$可得$A(\lambda,\ \mu)y\in(m)$。

最后，往证$(\mu I-Q)(A(\lambda,\ \mu)y)=0$。令$c=\sup\limits_{i\in E}|y_i|$，由$\overline{R}(\mu)y\leqslant\frac{c}{\mu}\mathbf{1}$得：

$$(\mu I+D_q+S)(I+|\lambda-\mu|\overline{R}(\mu))y<\infty,$$

所以，对$(\mu I-Q)(A(\lambda,\ \mu)y)$可以施行结合律，故

$$\begin{aligned}(\mu I-Q)(A(\lambda,\ \mu)y)&=((\mu I-Q)A(\lambda,\ \mu))y\\&=[(\mu I-Q)+(\lambda-\mu)(\mu I-Q)\overline{R}(\mu)]y\\&=[\mu I-Q+(\lambda-\mu)I]y\\&=(\lambda I-Q)y=0.\end{aligned}$$

命题4.4. $\mathscr{L}_\lambda(\mathscr{M}_\lambda)$的维数不依赖$\lambda>0$，故可记之为$l^+(m^+)$。（$\mathscr{L}_\lambda$的维数理解为$\mathscr{L}_\lambda$中极大线性无关向量组中向量的个数。）

证 设$\alpha^{(1)\prime}$，$\alpha^{(2)\prime}$，…，$\alpha^{(k)\prime}$线性无关，且均属于$\mathscr{L}_\lambda$，记$\beta^{(i)\prime}=\alpha^{(i)\prime}A(\lambda,\ \mu)$，$(i=1,\ \cdots,\ k)$。由命题4.3知$\beta^{(i)\prime}\in\mathscr{L}_\mu$，$(i=1,\ \cdots,\ k)$。若能$\beta^{(1)\prime}$，…，$\beta^{(k)\prime}$线性无关，则命题得证。事实上，若$\sum\limits_{i=1}^{k}C_i\beta^{(i)\prime}=0$，则$\sum\limits_{i=1}^{k}C_i\beta^{(i)\prime}A(\mu,\lambda)=0$，此即$\sum\limits_{i=1}^{k}C_i\alpha^{(i)\prime}=0$，故由$\alpha^{(1)\prime}$，…，$\alpha^{(k)\prime}$线性无关得$C_i=0$，$(i=1,\ \cdots,\ k)$。命题证毕。

定理4.7. 任给矩阵$R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda)i、j\in E)$，$(\lambda>0)$，它是某一个准转概阵$P(t)$的拉氏变换的充要条件是$R(\lambda)$满足：

(i) 正则化条件：$R(\lambda)\geqslant0$，$\lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$，$(\lambda>0)$；

(ii) 予解方程式：$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0$，$(\lambda,\ \mu>0)$；

(iii) 连续性条件：$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I$。

证明请参见[48]定理2.4。

定理4.8. $R(\lambda)$ 是某一Q—过程的拉氏变换的充要条件是：$R(\lambda)$满足定理4.7的(i)、(ii)和

(iii)* $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q$。

证 用定理4.7，为证定理4.8只须证明两点：

(1) (iii)*⇒(iii)。

(2) 若$R(\lambda)$是准转概阵$P(t)$的拉氏变换，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(P(t)-I).$$

事实上(1)显然成立。只证(2)。设$R(\lambda)=(r_{i,j}(\lambda),\ i,\ j\in E)$是准转概阵$P(t)=(p_{i,j}(t),i,j\in E)$的拉氏变换，$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(P(t)-I)=(q_{i,j},\ i,\ j\in E)$。

先设$0\leqslant q_i<\infty$，$(q_i=-q_{i,i})$。则

$$\lambda^2 r_{i,i}(\lambda)-\lambda+q_i=\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}(p_{i,i}(t)-1+q_i t)dt.$$

任给$\varepsilon>0$，可取$\delta>0$，使

$$|p_{i,i}(t)-1+q_i t|<\varepsilon t,\quad (0<t\leqslant\delta).$$

所以

$$|\lambda^2 r_{i,i}(\lambda)-\lambda+q_i|\leqslant\varepsilon\int_0^\delta\lambda^2 te^{-\lambda t}dt+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(1+q_i t)dt$$

$$\leqslant\varepsilon+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(1+q_i t)dt.$$

在上式中先令$\lambda\to\infty$，次令$\varepsilon\to 0$即得

$$\lim_{\lambda\to\infty}|\lambda^2 r_{i,i}(\lambda)-\lambda+q_i|=0.$$

若$q_i=\infty$，仿之可证：

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda-\lambda^2 r_{i,i}(\lambda))=\infty.$$

总之，恒有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{i,i}(\lambda)-1)=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,i}(t)-1}{t},\quad (i\in E).$$

仿之可证：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2 r_{i,j}(\lambda)=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,j}(t)}{t},\quad (i\neq j).$$

定理4.9. $R(\lambda)$是某个满足(B)((F))的Q—过程 $P(t)$的拉氏变换的充要条件是：$R(\lambda)$满足定理4.7中的(i)、(ii)和(B_λ)((F_λ))。

证 充分性。若$R(\lambda)$满足(i)、(ii)和

(B_λ)：$(\lambda I-Q)R(\lambda)=I$，$(\lambda>0)$，

则由$\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$得知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda QR(\lambda)=Q(\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda))=Q.$$

因此，从(B_λ)得(iii)*，用定理4.8，充分性得证。

必要性。用$(B)\Longleftrightarrow(B_\lambda)$及定理4.8即得。

命题4.5. (1) 设$z(\lambda)\geqslant 0$，$z(\lambda)\in(m)$，令

$$\begin{cases}w_0(\lambda)=0,\\(\lambda I+D_q)w_{n+1}(\lambda)=z(\lambda)+Sw_n(\lambda),\quad(n\geqslant 0),\end{cases}$$

则当$n\uparrow\infty$时，$w_n(\lambda)\uparrow\bar{R}(\lambda)z(\lambda)$。

(2) 设$\alpha'(\lambda)\geqslant 0$，$\alpha'(\lambda)\in(l)$，令

$$\begin{cases}\beta'_0(\lambda)=0\\\beta'_{n+1}(\lambda)(\lambda I+D_q)=\alpha'(\lambda)+\beta'_n(\lambda)S,\quad(n\geqslant 0),\end{cases}$$

则当$n\uparrow\infty$时，$\beta'_n(\lambda)\uparrow\alpha'(\lambda)\bar{R}(\lambda)$。

(其中$S=Q+D_q$如定理4.1所定义，$\bar{R}(\lambda)$是最小Q—过程的拉氏变换，$\alpha'(\lambda)$，$\beta'_n(\lambda)$表行向量。并不表示对λ求微商。)

证 令$\bar{R}(\lambda)$，$R_n(\lambda)$分别表$\bar{P}(t)$、$P_n(t)$之拉氏变换，$S_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}R_k(\lambda)$，$(n\geqslant 0)$，定理4.3中已证：

$$R_0(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1},\quad R_n(\lambda)=\Pi(\lambda)R_{n-1}(\lambda),$$

$$\Pi(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}S.$$

所以 $\quad(\lambda I+D_q)S_n(\lambda)=I+SS_{n-1}(\lambda),$

$$S_n(\lambda)(\lambda I+D_q)=I+S_{n-1}(\lambda)S.$$

若令$G_0(\lambda)=0$, $G_n(\lambda)=S_{n-1}(\lambda)$ $(n\geqslant 1)$，则仍有

$$(a)\ \begin{cases}G_0(\lambda)z(\lambda)=0,\\(\lambda I+D_q)^{-1}G_{n+1}(\lambda)z(\lambda)=z(\lambda)+SG_n(\lambda)z(\lambda),\ (n\geqslant 0),\end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases}\alpha'(\lambda)G_0(\lambda)=0,\\\alpha'(\lambda)G_{n+1}(\lambda)(\lambda I+D_q)^{-1}=\alpha'(\lambda)+\alpha'(\lambda)G_n(\lambda)S,\\ \qquad (n\geqslant 0).\end{cases}$$

用(a)，由于$n\uparrow\infty$时$G_n(\lambda)z(\lambda)\uparrow\overline{R}(\lambda)z(\lambda)$及定义$w_n(\lambda)$的递推公式唯一决定了$w_n(\lambda)$可知：$w_n(\lambda)\uparrow\overline{R}(\lambda)z(\lambda)$。仿之，用$(b)$可得(2)。

命题4.6. 令

$$\Gamma=\left\{\alpha'(\lambda)\left|\begin{array}{l}0\leqslant\alpha'(\lambda)\in(l),\\\alpha'(\mu)=\alpha'(\lambda)A(\lambda,\ \mu),\end{array}\right.\ \lambda>0,\ \mu>0\right\},$$

$$\Gamma_1=\left\{\alpha'(\lambda)\left|\begin{array}{l}\alpha'(\lambda)=\beta'\overline{R}(\lambda)+\bar{\alpha}'(\lambda),\ \beta'\geqslant 0,\\\beta'\overline{R}(\lambda)\in(l),\\\bar{\alpha}'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda,\ \bar{\alpha}'(\mu)=\bar{\alpha}'(\lambda)A(\lambda,\mu),\\\lambda>0,\ \mu>0\end{array}\right.\right\}$$

$$Y=\left\{y(\lambda)\left|\begin{array}{l}0\leqslant y(\lambda)\in(m),\\y(\mu)=A(\lambda,\ \mu)y(\lambda),\end{array}\right.\ \lambda>0,\ \mu>0\right\},$$

$$Y_1=\left\{y(\lambda)\left|\begin{array}{l}y(\lambda)=\overline{R}(\lambda)z+\bar{y}(\lambda),\ z\geqslant 0,\\\overline{R}(\lambda)z\in(m),\\\bar{y}(\lambda)\in\mathscr{M}_\lambda,\bar{y}(\mu)=A(\lambda,\mu)\bar{y}(\lambda),\\\lambda>0,\ \mu>0\end{array}\right.\right\}$$

则$\Gamma_1=\Gamma$, $Y_1=Y$。

注意：此处$\alpha'(\lambda)$并不表示对λ求导数，只不过表示$\alpha'(\lambda)$是含参数λ的定义在E上的行向量。

证 (1) $Y_1\subset Y$。由于$\overline{R}(\lambda)$满足予解方程式，故$A(\lambda,\ \mu)\cdot\overline{R}(\mu)=\overline{R}(\mu)$，若$z\geqslant 0$，$\overline{R}(\lambda)z\in(m)$，则$A(\lambda,\mu)(\overline{R}(\lambda)z)$

$=(A(\lambda,\ \mu)\bar{R}(\lambda))z=\bar{R}(\mu)z$。所以，任取$y(\lambda)$

$=(\bar{R}(\lambda)z+\tilde{y}(\lambda))\in Y_1$，必有$y(\lambda)\geqslant 0$，$y(\lambda)\in(m)$及

$$A(\lambda,\ \mu)y(\lambda)=A(\lambda,\ \mu)(\bar{R}(\lambda)z+\tilde{y}(\lambda))$$
$$=\bar{R}(\mu)z+\tilde{y}(\mu)=y(\mu),\quad(\lambda>0,\ \mu>0).$$

此即$y(\lambda)\in Y$。

(2) $Y\subset Y_1$。任取$y(\lambda)\in Y$，必有

$$0\leqslant y(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)y(\mu)=y(\mu)+(\mu-\lambda)\bar{R}(\lambda)y(\mu),$$

所以

$$y(\mu)\geqslant(\lambda-\mu)\bar{R}(\lambda)y(\mu)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\Big[\Big(1-\frac{\mu}{\lambda}\Big)\lambda(\lambda\bar{R}(\lambda)-I)y(\mu)+(\lambda-\mu)y(\mu)\Big],$$

于是

$$\mu y(\mu)\geqslant\Big(1-\frac{\mu}{\lambda}\Big)\lambda(\lambda\bar{R}(\lambda)-I)y(\mu).\tag{4.9}$$

若注意$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\bar{R}(\lambda)-I)=Q$，在(4.9)中令$\lambda\to\infty$取极限，并用法都引理可得：

$$\mu y(\mu)\geqslant Qy(\mu).\tag{4.10}$$

故可令

$$\mu y(\mu)=z(\mu)+Qy(\mu),\quad(0\leqslant z(\mu)<\infty),\tag{4.11}$$

若再令

$$\begin{cases}w_0(\mu)=0\\(\mu I+D_q)w_{n+1}(\mu)=z(\mu)+Sw_n(\mu),\quad(n\geqslant 0),\end{cases}\tag{4.12}$$

(w_n是定义在E上的列向量，$S=Q+D_q$之定义见定理4.1)比较(4.11)与(4.12)并用归纳法可证：

$$0\leqslant w_n(\mu)\leqslant y(\mu),\quad(n\geqslant 0).\tag{4.13}$$

但是，由(4.10)有

$$Sy(\mu)\leqslant(\mu I+D_q)y(\mu)<\infty,$$

又因为由命题4.5有：

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\mu) = w(\mu) = \overline{R}(\mu)z(\mu)$$

存在，所以在(4.12)中令$n\to\infty$并用控制收敛定理可得

$$(\mu I + D_q)w(\mu) = z(\mu) + Sw(\mu),$$

亦即

$$\mu w(\mu) = z(\mu) + Qw(\mu). \tag{4.14}$$

由于 $y(\mu) \geqslant w(\mu) = \overline{R}(\mu)z(\mu)$，所以可令

$$y(\mu) = \overline{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu), \tag{4.15}$$

其中$z(\mu)\geqslant 0$，$\overline{R}(\mu)z(\mu)\in(m)$，$\tilde{y}(\mu)\geqslant 0$，$\tilde{y}(\mu)\in(m)$。

下面我们证明：$z(\mu)=z$与$\mu>0$ 无关，且$\tilde{y}(\lambda)$ 满足：$\tilde{y}(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu)$，$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\mu$，$(\lambda>0,\ \mu>0)$。

首先我们证明$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\mu$。事实上，由(4.11)、(4.14)、(4.15)得

$$\begin{aligned} Q\tilde{y}(\mu) &= \mu y(\mu) - z(\mu) - Qw(\mu) \\ &= \mu y(\mu) - \mu w(\mu) = \mu\tilde{y}(\mu). \end{aligned}$$

又因为$\tilde{y}(\mu)\geqslant 0$，$\tilde{y}(\mu)\in(m)$，所以$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\mu$。

其次我们证明(4.15)中的表示法唯一，即

"$\overline{R}(\mu)z(\mu)+\tilde{y}(\mu)=0$，$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\lambda$，

$\overline{R}(\mu)z(\mu)\in(m)\Rightarrow z(\mu)=\tilde{y}(\mu)=0$。"

事实上，若$\overline{R}(\mu)z(\mu)+\tilde{y}(\mu)=0$，由$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\mu$及$\overline{R}(\mu)$满足$(B_\cdot)$得知：

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu I - Q)(\overline{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu)) \\ &= (\mu I - Q)(\overline{R}(\mu)z(\mu)) \\ &= ((\mu I - Q)\overline{R}(\mu))z(\mu) = z(\mu). \end{aligned}$$

(注意上面施行的结合律是允许的，证明仿命题4.3)也有$\tilde{y}(\mu)=0$。

最后证明$\tilde{y}(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu)$，且$z(\mu)=z$不依赖$\mu>0$。事实上由$y(\lambda)\in Y$，若再注意(4.15)就有

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= A(\mu,\ \lambda)y(\mu) \\ &= A(\mu,\ \lambda)\,(\overline{R}(\mu)z(\mu)) + A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu) \\ &= \overline{R}(\lambda)z(\mu) + A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu). \end{aligned} \tag{4.16}$$

因为$\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\mu$，所以，用命题4.3得

$$A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu)\in\mathscr{M}_\lambda.$$

但是$\bar{R}(\lambda)z(\mu)=A(\mu,\ \lambda)(\bar{R}(\mu)z(\mu))\in(m)$,

且
$$y(\lambda)=\bar{R}(\lambda)z(\lambda)+\tilde{y}(\lambda), \tag{4.17}$$

比较(4.16)、(4.17)并注意(4.15)中表示法唯一可得

$$z(\mu)=z\quad 与\mu>0无关,$$

且
$$\tilde{y}(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)\tilde{y}(\mu).$$

总上，我们证明了$y(\lambda)\in Y_1$。

仿之可证$\Gamma=\Gamma_1$。

定理4.10. (满足(F)的Q—过程的构造)设Q是任一无法转强阵(否则Q—过程唯一，定理4.3已构造出来了)，则

(I) 若$l^+=0$，则满足(F)的Q—过程恰有一个，它就是$\bar{P}(t)$。

(II) 若$l^+>0$，任取$\alpha'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$，$\alpha'(\lambda)\neq0$，则

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/(c+\lambda\alpha'(\lambda)1)$$

是一个满足(F)的Q—过程，其中c是非负实数，$\bar{R}(\lambda)$，$\bar{y}(\lambda)$之意义如前。且$R(\lambda)$是不断的充要条件是$c=0$。

(III)若$l^+=1$，则全部满足(F) 的Q—过程是一切下述形式的$R(\lambda)$:

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+m_\lambda y(\lambda)\alpha'(\lambda),$$

$$y(\lambda)\in Y,\ (Y之定义见命题4.6),$$

$$\alpha'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda,\ \ \alpha'(\lambda)\neq0,$$

m_λ满足：$m_\mu=m_\lambda[1+(\lambda-\mu)m_\mu\alpha'(\lambda)y(\mu)]$,

$$0\leqslant m_\lambda,$$

$$m_\lambda y(\lambda)\leqslant\bar{y}(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)1,\quad (当\alpha'(\lambda)\neq0时).$$

且此时恰有一个满足(F)的不断的Q—过程，就是

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)1.$$

(IV) 若$l^+=k>1$，令$\alpha'_1(\lambda),\cdots,\ \alpha'_k(\lambda)$是$\mathscr{L}_\lambda$的一组极大线性无关向量，取$y_1(\lambda),\cdots,\ y_J(\lambda)\in Y$，令

$$t_{j,l}(\lambda,\ \mu)=\alpha'_l(\lambda)y_j(\mu),\ \ l=1,\ \cdots,\ k,\ \ j=1,\ \cdots,\ J,$$

$$T(\lambda,\ \mu)=(t_{j,l}(\lambda,\ \mu)j=1,\ \cdots,\ J,\ l=1,\ \cdots,\ k).$$

若$M(\lambda)=(m_{j,l}(\lambda),\ j=1,\ \cdots,\ k,\ l=1,\ \cdots,\ J)$满足

$$M(\mu)=(I+(\lambda-\mu)M(\mu)T(\lambda,\ \mu))M(\lambda),\quad (\lambda>0,\ \mu>0),$$

而且

$$0\leqslant\sum_{S=1}^{J}\Big(\sum_{j=1}^{k}\lambda a_j'(\lambda)1m_{j,S}(\lambda)\Big)y_S(\lambda)\leqslant\bar{y}(\lambda),$$

则

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{S=1}^{J}m_{j,S}(\lambda)y_S(\lambda)\Big)a_j'(\lambda)$$

是满足(F)的Q—过程。

证 (I) 设$l^+=0$。任取一个满足(F_λ)的Q—过程$R(\lambda)$,必有$(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))(\lambda I-Q)=0$, $R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)\geqslant 0$, $(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))1\leqslant\frac{1}{\lambda}$, $(\lambda>0)$,此即$R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)$之任一行都属于$\mathscr{L}_\lambda$,由$l^+=0$得$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)$, (I)得证。

(II) 设$l^+>0$。任取$a'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$, $a'(\lambda)\neq 0$, $R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)a'(\lambda)/(c+\lambda a'(\lambda)1)$, $(c\geqslant 0)$, 显然有$0\leqslant R(\lambda)$, $\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$ $(\lambda R(\lambda)1=1\Longleftrightarrow c=0)$,再用$a'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$及$\bar{R}(\lambda)$满足$(F_\lambda)$知$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$, 即$R(\lambda)$满足$(F_\lambda)$, 最后, 由$\bar{R}(\lambda)$满足预解方程及$a'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$可得:

$$(\mu-\lambda)\bar{R}(\lambda)\ \bar{y}(\mu)=\bar{y}(\lambda)-\bar{y}(\mu),$$

$$(\mu-\lambda)a'(\lambda)\ \bar{R}(\mu)=a'(\lambda)-a'(\mu),$$

$$(\mu-\lambda)a'(\lambda)\ \bar{y}(\mu)=(\mu a'(\mu)-\lambda a'(\lambda))1,$$

总上三式可知$R(\lambda)$满足予解方程式, 故由定理4.9知$R(\lambda)$是满足(F_λ)之Q—过程。

(III) 设$l^+=1$。取定$a'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$, $a'(\lambda)\neq 0$。任取满足(F_λ)的Q—过程$R(\lambda)$,由$(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))(\lambda I-Q)=0$及$l^+=1$知(注意$a'(\lambda)1>0$):

$$R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)=z(\lambda)a'(\lambda),\quad (z(\lambda)\geqslant 0,\ z(\lambda)\in(m)).\quad (4.18)$$

用定理4.9，欲(4.18)确定的$R(\lambda)$是满足(F_λ)的Q—过程的充要条件是$R(\lambda)$满足$0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$及予解方程式，而$\bar{R}(\lambda)$ 满足予解方程式，故$R(\lambda)$满足予解方程式的充要条件是：

$$
\begin{aligned}
z(\lambda)\alpha'(\lambda)-z(\mu)\alpha'(\mu)+(\lambda-\mu)(\bar{R}(\lambda)z(\mu)\alpha'(\mu)\\
+z(\lambda)\alpha'(\lambda)z(\mu)\alpha'(\mu)+z(\lambda)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu))\\
=0.
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
&z(\lambda)(\alpha'(\lambda)+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu))\\
=&(I+(\mu-\lambda)\bar{R}(\lambda))z(\mu)\alpha'(\mu)\\
&+(\mu-\lambda)z(\lambda)\alpha'(\lambda)z(\mu)\alpha'(\mu).
\end{aligned}
$$

若注意$A(\lambda,\ \mu)=I+(\lambda-\mu)\bar{R}(\mu)$，$\alpha'(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=\alpha'(\mu)$， 上式即：

$$
\begin{aligned}
z(\lambda)\alpha'(\mu)=(A(\mu,\ \lambda)z(\mu)\\
+(\mu-\lambda)z(\lambda)\alpha'(\lambda)z(\mu))\alpha'(\mu).
\end{aligned}
$$

由于$\alpha'(\mu)\neq 0$，所以上式即

$$
z(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)z(\mu)+(\mu-\lambda)z(\lambda)\alpha'(\lambda)z(\mu),
$$

此即

$$
z(\lambda)(1+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)z(\mu))=A(\mu,\ \lambda)z(\mu).
$$

若令

$$
z(\lambda)=m_\lambda y(\lambda),\ \ m_\lambda\geqslant 0,\ \ 0\leqslant y(\lambda)\in(m),
$$

则上式又等价于

$$
\begin{cases}
y(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)y(\mu),\ \ (\text{即}y(\lambda)\in Y),\\
m_\lambda(1+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)m_\mu y(\mu))=m_\mu.
\end{cases}
$$

由于$\bar{R}(\lambda)\geqslant 0$，$z(\lambda)\geqslant 0$，$\alpha'(\lambda)\geqslant 0$，所以$R(\lambda)$满足正则化条件$0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$等价于

$$
m_\lambda\geqslant 0
$$

$$
m_\lambda y(\lambda)\leqslant\frac{\bar{y}(\lambda)}{\lambda\alpha'(\lambda)1}.
$$

注意：由于$m_\lambda-m_\mu=(\mu-\lambda)\alpha'(\lambda)y(\mu)m_\lambda m_\mu$ $(\lambda>0,\ \mu>0)$，所以

m_i 或则恒为0或则恒大于0。

(IV) 设$l^+=k>1$，$\alpha'_1(\lambda)$，…，$\alpha'_k(\lambda)$是$\mathscr{L}_\lambda$的一个极大线性无关向量组．对任何一个满足(F_λ)的Q—过程$R(\lambda)$，必有$(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))(\lambda I-Q)=0$，从而

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda). \tag{4.19}$$

由于(4.19)确定的$R(\lambda)$必满足(F_λ)，所以(4.19)确定之$R(\lambda)$是一个满足(F_λ)的Q—过程的充要条件是$R(\lambda)$满足$0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant1$及予解方程式。由$\bar{R}(\lambda)$满足予解方程式得知$R(\lambda)$满足予解方程式的充要条件是：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda)-\sum_{j=1}^{k}z_j(\mu)\alpha'_j(\mu)\\&\quad+(\lambda-\mu)\Big[\bar{R}(\lambda)\sum_{j=1}^{k}z_j(\mu)\alpha'_j(\mu)\\&\quad+\Big(\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k}z_j(\mu)\alpha'_j(\mu)\Big)\\&\quad+\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda)\bar{R}(\mu)\Big]=0.\end{aligned} \tag{4.20}$$

下面只在(m)中定$z_j(\lambda)$（这可保证下面施行的结合律合法），(4.20)即

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda)A(\lambda,\ \mu)-A(\mu,\lambda)\sum_{j=1}^{k}z_j(\mu)\alpha'_j(\mu)\\&\quad+(\lambda-\mu)\Big(\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)\alpha'_j(\lambda)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k}z_j(\mu)\alpha'_j(\mu)\Big)\\&=0.\end{aligned} \tag{4.21}$$

由$\alpha'_j(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=\alpha'_j(\mu)$知(4.21)等价于：

$$\sum_{j=1}^{k}\Big[z_j(\lambda)-A(\mu,\lambda)z_j(\mu)+(\lambda-\mu)\Big(\sum_{l=1}^{k}z_l(\lambda)\alpha_l'(\lambda)\Big)$$

$$z_j(\mu)\Big]\alpha_j'(\mu)=0. \tag{4.22}$$

由$\{\alpha_j'(\mu),\ j=1,\ \cdots,\ k\}$是极大线性无关向量组知（4.22）等价于：

$$z_j(\lambda)-A(\mu,\ \lambda)z_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{l=1}^{k}z_l(\lambda)\alpha_l'(\lambda)z_j(\mu)=0,$$

$$(j=1,\ \cdots,\ k). \tag{4.23}$$

即是

$$\sum_{l=1}^{k}z_l(\lambda)[\delta_{j,l}+(\lambda-\mu)\alpha_l'(\lambda)z_j(\mu)]$$

$$=A(\mu,\ \lambda)z_j(\mu),\ (j=1,\ \cdots,\ k). \tag{4.24}$$

若令

$$z_l(\lambda)=\sum_{s=1}^{J}m_{l,s}(\lambda)y_s(\lambda),\ \ 0\leqslant y_s(\lambda)\in(m),$$

$$b_{j,l}(\lambda,\ \mu)=\delta_{j,l}+(\lambda-\mu)\alpha_l'(\lambda)\sum_{r=1}^{J}m_{j,r}(\mu)y_r(\mu),$$

$$(j=1,\ \cdots,\ k,\ l=1,\cdots,J)$$

则（4.24）化为

$$\sum_{s=1}^{J}y_s(\lambda)\Big(\sum_{l=1}^{k}b_{j,l}(\lambda,\ \mu)m_{l,s}(\lambda)\Big)$$

$$=\sum_{s=1}^{J}m_{j,s}(\mu)A(\mu,\lambda)y_s(\mu),\quad (j=1,\cdots,k), \tag{4.25}$$

故

$$\begin{cases} y_s(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)y_s(\mu),\ (0\leqslant y_s(\lambda)\in(m),s=1,\cdots,J), \\ \sum_{l=1}^{k}b_{j,l}(\lambda,\ \mu)m_{l,s}(\lambda)=m_{j,s}(\mu),\ \begin{pmatrix} j=1,\ \cdots,\ k \\ s=1,\ \cdots,\ J \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{4.26}$$

所确定的$y_s(\lambda)$，$m_{j,s}(\lambda)$，$(j=1,\cdots,k,\ \ s=1,\cdots,J)$ 必满足(4.25)。令

$$t_{j,l}(\lambda,\ \mu)=\alpha_l'(\lambda)y_j(\mu),\ j=1,\ \cdots,\ J,\quad l=1,\ \cdots,\ k,$$

$$T(\lambda,\ \mu)=(t_{j,l}(\lambda,\ \mu),\ j=1,\ \cdots,\ J,\ l=1,\ \cdots,\ k),$$

$$B(\lambda,\ \mu)=(b_{j,l}(\lambda,\ \mu),\ \ j=1,\ \cdots,\ k,\ \ l=1,\ \cdots,\ k),$$

$$M(\lambda)=(m_{j,l}(\lambda),\ j=1,\ \cdots,\ k,\ l=1,\ \cdots,\ J),$$

则(4.26)化为

$$\begin{cases}y_s(\lambda)=A(\mu,\ \lambda)y_s(\mu),\ \ 0\leqslant y_s(\lambda)\in(m),\ \ s=1,\cdots,\ J,\\ M(\mu)=B(\lambda,\mu)M(\lambda)=(I+(\lambda-\mu)M(\mu)T(\lambda,\ \mu))M(\lambda),\end{cases}\tag{4.27}$$

而$0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$等价于

$$0\leqslant\sum_{j=1}^{k}z_j(\lambda)(\lambda\alpha_j'(\lambda)1)\leqslant\bar{y}(\lambda),$$

此即

$$0\leqslant\sum_{s=1}^{J}\Big(\sum_{j=1}^{k}\lambda\alpha_j'(\lambda)1m_{j,s}(\lambda)\Big)y_s(\lambda)\leqslant\bar{y}(\lambda).$$

(IV) 证毕。

定理4.11. 对任何转强阵Q来说，

(1) 满足(F)的Q—过程或者恰有一个或者有无穷多个，且恰有一个的充要条件是下列两条件中有一成立：

(a) Q有法；

(b) $l^+=0$。

(2) 满足(F)的不断的Q—过程或者没有，或者恰有一个，或者有无穷多个，而且

(a) Q无法且$l^+>1\Longrightarrow$有无穷多个；

(b) Q保守且Q—过程唯一，或者$l^+=1\Longrightarrow$恰有一个；

(c) $l^+=0$且Q—过程不唯一$\Longrightarrow$没有。

证 (1) 若Q有法，则恰有唯一一个Q—过程，它就是$\bar{P}(t)$，

且 $\bar{P}(t)$是不断的，满足(B)、(F)。若Q无法，且 $l^+=0$，由定理4.10(I)，恰有唯一一个满足(F)的Q—过程．若Q无法，且 $l^+>0$，由定理4.10(II)知：有无穷多个满足(F)的Q—过程。

(2) 由定理4.10(II)知：当$l^+>0$时

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{\lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1}},\quad (\alpha'(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda,\quad \alpha'(\lambda)\neq 0)$$

都是不断的且满足(F)的Q—过程。若$l^+>1$，可取$\alpha'_1(\lambda)$，$\alpha'_2(\lambda)\in\mathscr{L}_\lambda$，$\alpha'_1(\lambda)$与$\alpha'_2(\lambda)$线性无关，定义$\alpha'_{a,b}(\lambda)=a\alpha'_1(\lambda)+b\alpha'_2(\lambda)$，($a$，$b$是不同为 0 的非负数)，则

$$R_{a;b}(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'_{a;b}(\lambda)}{\lambda\alpha'_{a,b}(\lambda)\mathbf{1}}$$

是满足(F)的不断的Q—过程。而当Q无法且$l^+>1$时这样的$R_{a,b}(\lambda)$有无穷多个（因这时有$\bar{y}(\lambda)\neq 0$，所以只要$\alpha'_{a,b}(\lambda)$与$\alpha'_{c,d}(\lambda)$线性无关，必有$R_{a,b}(\lambda)\neq R_{c,d}(\lambda)$，而由$\alpha'_1(\lambda)$与$\alpha'_2(\lambda)$线性无关知$\alpha'_{1,1}(\lambda)$，$\alpha'_{1,2}(\lambda)$，…中任取二个都线性无关）。

又由定理4.10知，当$l^+=1$时恰有一个满足(F)的不断的Q—过程，当$l^+=0$时满足(F)的Q—过程恰有一个。

总之，不断的且满足(F)的Q—过程或者没有或者恰有一个或者有无穷多个，而且

(a) Q无法且$l^+>1\Longrightarrow$有无穷多个；

(b) $l^+=1\Longrightarrow$恰有一个。

又因为

(c) $l^+=0$且Q—过程不唯一$\Longrightarrow l^+=0$且Q无法$\Longrightarrow$恰有唯一一个满足（F）的Q—过程$\bar{P}(t)$且$\bar{P}(t)\mathbf{1}\neq\mathbf{1}\Longrightarrow$没有满足(F)的不断的$Q$—过程。因此，再证明“$Q$保守且$Q$过程唯一$\Longrightarrow$恰有一个满足(F)的不断的$Q$—过程”，则定理证毕。而当$Q$保守时，不断的$Q$—过程恒存在（命题4.7将证明）再用$Q$—过程唯一知$\bar{P}(t)$就是这个满足(F)且不断的$Q$—过程。

命题4.7. 设Q是保守的转强阵，则

(1) 每个Q—过程$P(t)$都满足(B);

(2) 不断的Q—过程恒存在.

证 (1) 如命题4.1, 考虑$E_\Delta = E\cup\{\Delta\}$, $\Delta\overline{\in}E$,

$$\tilde{P}(t)=\begin{matrix} & \Delta & E \\ \Delta & 1 & 0 \\ E & d(t) & P(t)\end{matrix},\quad d(t)=1-P(t)1,$$

由命题4.1有：$\left(\frac{d}{dt}d(t)\right)\Big|_{t=0}$为非负实数，再注意

$$Q1+\left(\frac{d}{dt}d(t)\right)_{t=0}\leqslant 0,\ Q1=0\text{得：}$$

$$\left(\frac{d}{dt}(d(t))\right)_{t=0}=0.$$

亦即

$$\lim_{t\to 0+}\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}\frac{p_{i,j}(t)}{t}=-q_{i,i}=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}q_{i,j},\quad (i\in E),$$

所以由本节前部的准转概阵之性质(VII)得知$P(t)$满足(B).

(2) 若Q有法，则$\bar{R}(\lambda)$就是不断的Q—过程. 若Q无法，$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)\bar{R}(\lambda)1$就是不断的$Q$—过程(只须取$\alpha'(\lambda)=e_i'$即可).

命题4.8. 令$\alpha'(\lambda)\in\Gamma$, $y(\lambda)\in Y$, 则$\lambda\uparrow\infty$时$\alpha'(\lambda)\downarrow 0$, $y(\lambda)\downarrow 0$. Γ及Y的定义见命题4.6 (注意$\bar{y}(\lambda)\in Y$, $e_i'\bar{R}(\lambda)\in\Gamma$).

证 任取$\lambda>\mu>0$, 由$\alpha'(\mu)=\alpha'(\lambda)A(\lambda,\mu)$, $\alpha'(\lambda)\geqslant 0$得：$\alpha'(\mu)-\alpha'(\lambda)=(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)\geqslant 0$, 即$\alpha'(\lambda)$对$\lambda$非升, 故可令$\bar{\alpha}'=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\alpha'(\lambda)$. 谬设存在$i\in E$, 使$\bar{\alpha}'e_i>0$(即$\bar{\alpha}'$的第$i$个分量大于0), 则当$\lambda>\mu$时有：

$$\begin{aligned}\alpha'(\mu)e_i&=\alpha'(\lambda)e_i+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)e_i\\&\geqslant(\lambda-\mu)(e_i'[\alpha'(\lambda)e_i])\bar{R}(\mu)e_i\\&\geqslant(\lambda-\mu)\,\bar{\alpha}'e_i(e_i'\bar{R}(\mu)e_i),\end{aligned}$$

而 $\bar{\alpha}'e_i(e_i'\bar{R}(\mu)e_i)>0$，故在上式中令 $\lambda\to\infty$ 得 $\alpha'(\mu)e_i=\infty$，此为不可能，故 $\bar{\alpha}'=0$。

命题4.9. 任给转强阵Q，若

$$\inf_{i\in E}(e_i'\lambda_0\bar{R}(\lambda_0)1)=0,\quad (\lambda_0>0),$$

则存在不断的Q—过程。

证 令$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)1$，$\alpha'(\lambda)=\beta'\bar{R}(\lambda)\neq 0$，$\beta'\geqslant 0$，$\beta'1=\infty$，$\beta'\bar{R}(\lambda)1<\infty$，往证$R(\lambda)$是不断的$Q$—过程。事实上，

(1) 显然有$R(\lambda)\geqslant 0$，$\lambda R(\lambda)1=1$；

(2) 注意$\bar{y}(\lambda)\in Y$，$\alpha'(\lambda)=\beta'\bar{R}(\lambda)\in\Gamma$，有

$$\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)=\bar{y}(\lambda)A(\mu,\ \lambda)\alpha'(\mu)=\bar{y}(\mu)\alpha'(\mu),$$

所以若令$m_\lambda=\lambda\alpha'(\lambda)1$，则由$\bar{R}(\lambda)$满足预解方程可得

$$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)$$

$$=\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{m_\lambda}-\frac{\bar{y}(\mu)\alpha'(\mu)}{m_\mu}$$

$$+(\lambda-\mu)\left[\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)}{m_\lambda}+\frac{\bar{R}(\lambda)\bar{y}(\mu)\alpha'(\mu)}{m_\mu}\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu)\alpha'(\mu)}{m_\lambda m_\mu}\right]=\frac{1}{m_\lambda}\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)A(\lambda,\ \mu)$$

$$-\frac{1}{m_\mu}A(\mu,\ \lambda)\bar{y}(\mu)\alpha'(\mu)$$

$$+\frac{(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu}\bar{y}(\lambda)\alpha'(\mu)$$

$$=\left(\frac{1}{m_\lambda}-\frac{1}{m_\mu}+\frac{(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu}\right)\bar{y}(\lambda)\alpha'(\mu).$$

但是$(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)=-(\alpha'(\lambda)-\alpha'(\mu))$，故

$$\frac{1}{m_\lambda}-\frac{1}{m_\mu}+\frac{(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu}$$

$$=(\mu\alpha'(\mu)-\lambda\alpha'(\lambda)+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)(I-\mu\bar{R}(\mu)))\mathbf{1}\cdot\frac{1}{m_\lambda m_\mu}$$

$$=(\mu\alpha'(\mu)-\lambda\alpha'(\lambda)+(\lambda-\mu)\alpha'(\lambda)+\mu(\alpha'(\lambda)-\alpha'(\mu)))\mathbf{1}$$

$$\cdot\frac{1}{m_\lambda m_\mu}=0.$$

此即$R(\lambda)$满足予解方程。

(3) 由于$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\bar{R}(\lambda)-I)=Q$，若能证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/m_\lambda=0,$$

则$R(\lambda)$就是不断的 Q —过程了。事实上，由命题4.8有：$\lambda\uparrow\infty$时$\bar{y}(\lambda)\downarrow 0$，故若令 $d=-Q\mathbf{1}\geqslant 0$， 由 $(\lambda I-Q)\bar{y}(\lambda)=(\lambda I-Q)(\mathbf{1}-\lambda\bar{R}(\lambda)\mathbf{1})=d$ 可得：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{y}(\lambda)=d.$$

又$\lambda\alpha'(\lambda)=\lambda\beta'\bar{R}(\lambda)=\beta'(I+\bar{R}(\lambda)Q)=\beta'+\alpha'(\lambda)Q$，且由命题4.8当$\lambda\uparrow\infty$时$\alpha'(\lambda)\downarrow 0$，故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\alpha'(\lambda)=\beta'.$$

总之由$\beta'\mathbf{1}=\infty$得：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/m_\lambda=d\beta'/\beta'\mathbf{1}=0.$$

由定理的条件，存在k_1，k_2，…，$(k_i\in E)$使$e'_{k_i}\bar{R}(\lambda_0)\mathbf{1}<\frac{1}{2^i}$，取$\beta'$使$j=k_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ 时，$\beta'e_j$为1否则为0，这样的β'就满足$\beta'\mathbf{1}=\infty$，$\beta'\bar{R}(\lambda_0)\mathbf{1}<\infty$，再用 $\beta'\bar{R}(\lambda)=\beta'\bar{R}(\lambda_0)A(\lambda_0, \lambda)$ 得$\beta'\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}<\infty$ （一切$\lambda>0$），命题证毕。

命题4.10. 设Q是E上任一转强阵，$\Delta\bar{\in}E$，$E_\Delta=E\cup\{\Delta\}$，令

$$\tilde{Q}=\begin{matrix} & \begin{matrix}\Delta & E\end{matrix} \\ \begin{matrix}\Delta\\E\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ -Q\mathbf{1} & Q\end{pmatrix}\end{matrix}$$

是保守转强阵。若$\bar{P}(t)$是任一 $\tilde{Q}$ —过程（必满足(B)），$P(t)=$

$\tilde{P}(t)$ on E，则$P(t)$必是一个满足(B)的Q—过程。

证 若令$\tilde{Q}=(\tilde{q}_{i,j},\ i,\ j\in E_\Delta)$，$\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{i,j}(t),\ i,\ j\in E_\Delta)$，则由$\tilde{q}_{\Delta,\Delta}=0$及准转概阵性质(III)得$\tilde{p}_{\Delta,\Delta}(t)\geqslant e^{\tilde{q}_{\Delta,\Delta}t}=1$ $(t\geqslant 0)$，再注意$P(t)=\tilde{P}(t)$ on E 得：

$$\tilde{P}(t)=\begin{array}{c} \\ \Delta \\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Delta & E\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ b(t) & P(t)\end{pmatrix}\end{array}.$$

所以

(1) $P(t)\geqslant 0$，$P(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$；

(2) $\lim\limits_{t\to 0^-}P(t)=I$；

(3) $P(s+t)=\tilde{P}(s+t)$ on $E=P(s)P(t)$；

(4) $P'(0)=\tilde{P}'(0)$ on $E=Q$；

(5) $P'(t)=\tilde{P}'(t)$ on $E=(\tilde{Q}\tilde{P}(t))$ on $E=QP(t)$。

总之，$P(t)$是一个满足(B)的Q—过程。（注意此处$\tilde{P}'(t)$、$P'(t)$均表$\tilde{P}(t)$、$P(t)$对t的微商。）

由此命题看出：满足(B)的Q（任意）—过程的构造，可归结为$\tilde{Q}$—过程的构造，而$\tilde{Q}$是保守的。

定理4.12. 设Q是保守转强阵，

(I) 若$m^+=0$，则Q—过程唯一，它就是$\bar{R}(\lambda)$；

(II) 设$m^+>0$，令

$$\mathscr{D}=\left\{R(\lambda)\,|\,R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\frac{\bar{y}(\lambda)\beta'\bar{R}(\lambda)}{c+\lambda\beta'\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}},\quad \begin{array}{l}c\geqslant 0,\ \beta'\geqslant 0,\ \beta'\text{与}\ c\ \text{不同时为}0,\\ \beta'\bar{R}(\lambda)\in(l),\lambda>0\end{array}\right\},$$

$$\mathscr{D}_1=\left\{R(\lambda)\,|\,R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{c+\lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1}},\quad \begin{array}{l}\alpha'(\lambda)\in\Gamma=\Gamma_1,\ c\geqslant 0,\\ \alpha'(\lambda)\text{与}c\text{不同时为}0\end{array}\right\},$$

则$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_1$是一族满足$(B_\lambda)$的$Q$—过程，$c=0$的充要条件是它所对应的$Q$—过程$R(\lambda)$不断。当$m^+=1$时，$\mathscr{D}_1$就是全部$Q$—过程了。此外，当$\beta'\neq0$时$\mathscr{D}$中所对应的$Q$—过程不满足$(F_\lambda)$。

证 (I) 由定理4.5立得。

(II) 由Γ之定义即得$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1$再证$\mathscr{D}_1$是一族满足$(B_\lambda)$的$Q$—过程。

首先证明：当$m^+>0$（从而$\bar{y}(\lambda)\neq0$）时

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda),0\leqslant\gamma'(\lambda)\in(l),\gamma'(\lambda)\neq0,\quad(4.28)$$

确定一个满足(B_λ)的Q—过程的充要条件是

$$\begin{cases}\gamma'(\lambda)=m_\lambda\alpha'(\lambda),\ \alpha'(\lambda)\in\Gamma,\\ m_\lambda=(c+\lambda\alpha'(\lambda)1)^{-1},\ c\geqslant0,\ c\text{与}\alpha'(\lambda)\text{不同时为}0.\end{cases}\tag{4.29}$$

事实上，(4.28)中之$R(\lambda)$必满足(B_λ)，故$R(\lambda)$是满足(B_λ)的Q—过程的充要条件是

(a) $0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant1$;

(b) $R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0$.

由$\bar{R}(\lambda)$满足予解方程知(b)等价于

$$\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)-\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu)+(\lambda-\mu)(\bar{R}(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu)$$
$$+\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)R(\mu)+\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu))=0,$$

注意$A(\lambda,\ \mu)\bar{y}(\lambda)=\bar{y}(\mu)$，上式化为：

$$\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=\bar{y}(\lambda)\gamma'(\mu)$$
$$+(\mu-\lambda)\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu).$$

但是$\bar{y}(\lambda)\neq0$，所以上式又等价于

$$\gamma'(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=[1+(\mu-\lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)]\gamma'(\mu),\ (\lambda,\ \mu>0).\tag{4.30}$$

固定 $\lambda_0>0$，令 $\gamma'(\lambda_0)=m_{\lambda_0}\alpha'(\lambda_0)$，$m_{\lambda_0}\geqslant0$，$\alpha'(\lambda_0)\geqslant0$，$\alpha'(\lambda_0)\in(l)$，$\alpha'(\lambda)=\alpha'(\lambda_0)A(\lambda_0,\ \lambda)$，$(\lambda>0)$。则(4.30)等价于

$$\begin{cases}\gamma'(\lambda)=m_\lambda\alpha'(\lambda), & (4.31)\\ m_\lambda=[1+(\mu-\lambda)m_\lambda(\alpha'(\lambda)\bar{g}(\mu))]m_\mu, \quad (\lambda,\mu>0), & (4.32)\\ \alpha'(\lambda)\in\Gamma, & (4.33)\end{cases}$$

再令$\sigma(\lambda,\ \mu)=\alpha'(\lambda)\bar{g}(\mu)$，则(4.32) 化为

$$m_\lambda-m_\mu=(\mu-\lambda)m_\lambda m_\mu\sigma(\lambda,\ \mu),\ (\lambda,\ \mu>0), \qquad (4.34)$$

由 (4.34)看出m_λ或则恒为0或则无处为0（对$\lambda>0$)。而 $\gamma'(\lambda)\neq 0$，所以 $m_\lambda>0$， ($\lambda>0$)。因此，用 $m_\lambda m_\mu$ 除(4.34) 两边得：

$$m_\mu^{-1}-\mu\sigma(\lambda,\ \mu)=m_\lambda^{-1}-\lambda\sigma(\lambda,\ \mu), \qquad (4.35)$$

又因为$\alpha'(\lambda)\bar{g}(\mu)=\alpha'(\mu)A(\mu,\ \lambda)\bar{g}(\mu)=\alpha'(\mu)\bar{g}(\lambda)$，所以(4.35)即

$$m_\mu^{-1}-\mu\sigma(\mu,\ \lambda)=m_\lambda^{-1}-\lambda\sigma(\lambda,\ \mu),$$

亦即

$m_\mu^{-1}-\mu\alpha'(\mu)(1-\lambda\bar{R}(\lambda))=m_\lambda^{-1}-\lambda\alpha'(\lambda)(1-\mu\bar{R}(\mu))$， 而 $\alpha'(\mu)\bar{R}(\lambda)=\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)$，所以上式即

$$m_\lambda^{-1}-\lambda\alpha'(\lambda)1=c\ （不依赖\lambda>0）。 \qquad (4.36)$$

亦即

$$m_\lambda=(c+\lambda\alpha'(\lambda)1)^{-1},\quad (\lambda>0)。 \qquad (4.37)$$

显然

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\frac{\bar{g}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{c+\lambda\alpha'(\lambda)1}$$

满足$0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1$的充要条件是$c\geqslant 0$，且$c=0$的充要条件是$\lambda R(\lambda)1=1$。

总上，我们证明了：(4.28)定义的$R(\lambda)$是满足(B_λ)的Q—过程的充要条件是(4.29)成立。且$R(\lambda)$不断的充要条件是$c=0$。

如能再证明两点：(1) $\mathscr{D}$中之 $R(\lambda)$不满足(F_λ)，(2) 当 $m^+=1$时，任一 Q—过程均能表示成 (4.28)的形状，则定理证毕。

(1) 任取$R(\lambda)\in\mathscr{D}$，

$$\begin{aligned}&R(\lambda)(\lambda I-Q)\\ &=I+(c+\lambda\beta'\bar{R}(\lambda)1)^{-1}\bar{g}(\lambda)\beta'\bar{R}(\lambda)(\lambda I-Q)\end{aligned}$$

$$=I+(c+\lambda\beta'\bar{R}(\lambda)1)^{-1}\bar{y}(\lambda)\beta'\neq I.$$

(2) 若$m^+=1$，任取一个Q—过程$R(\lambda)$，必满足(B_λ)，故

$$(\lambda I-Q)(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))=0.$$

由$m^+=1$，$\bar{y}(\lambda)\neq 0$，$\bar{y}(\lambda)\in\mathscr{M}_\lambda$，得知

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda),\ 0\leqslant\gamma'(\lambda)\in(l).$$

命题4.11. (1) 若$R(\lambda)$是满足(F_λ)的Q—过程，则$\{e_i'R(\lambda),\ i\in E\}$线性无关，即

$$\sum_{i\in E}c_ie_i'R(\lambda)=0\Longrightarrow c_i=0,\ (i\in E).$$

(2) 若$R(\lambda)$是满足(B_λ)的Q—过程，则$\{R(\lambda)e_i,\ i\in E\}$线性无关。

证 (1) 设$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$，若$\sum\limits_{i\in E}c_ie_i'R(\lambda)=0$，($c_i$是实数，$i\in E$)，令$E_0=\{i|i\in E,\ c_i\geqslant 0\}$，$E_1=\{i|i\in E,\ c_i<0\}$。由$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$得：

$$R(\lambda)=(R(\lambda)S+I)(\lambda I+D_q)^{-1}.$$

($S=Q+D_q$，D_q之定义见定理4.3)，所以

$$\sum_{i\in E_s}(-1)^sc_ie_i'R(\lambda)$$

$$=\sum_{i\in E_s}(-1)^sc_ie_i'(R(\lambda)S+I)(\lambda I+D_q)^{-1},\ (s=0,\ 1),\tag{4.38}$$

由

$$\sum_{i\in E}c_ie_i'R(\lambda)=0\ \text{（与求和次序无关）},\tag{4.39}$$

得

$$0\leqslant\sum_{i\in E_0}c_ie_i'R(\lambda)=\sum_{i\in E_1}(-c_i)e_i'R(\lambda)<\infty.\tag{4.40}$$

由 $0 \leqslant \sum_{i \in E_s} (-1)^s c_i e_i' (\lambda I + D_q)^{-1} < \infty$ 得，

$$0 \leqslant \sum_{i \in E_s} (-1)^s c_i e_i' R(\lambda) S(\lambda I + D_q)^{-1} < \infty, \quad (s=0、1), \tag{4.41}$$

由 (4.39)、(4.40)、(4.41) 得：

$$\sum_{i \in E} c_i e_i' (\lambda I + D_q)^{-1}$$

$$= \sum_{i \in E} \left[c_i e_i' R(\lambda) - c_i e_i' R(\lambda) S(\lambda I + D_q)^{-1} \right] = 0.$$

故 $\sum_{i \in E} c_i e_i' = 0$，从而 $c_i = 0$ $(i \in E)$。

(2) 仿(1) 可证。

系1. $\{\bar{R}(\lambda) e_i, \ i \in E\}$、$\{e_i' \bar{R}(\lambda), \ i \in E\}$ 皆线性无关。

证 因为 $(\lambda I - Q) \bar{R}(\lambda) = \bar{R}(\lambda)(\lambda I - Q) = I$。

命题4.12. 若 Q 保守，$m^+ > 0$，则有无穷多个不断的满足 (B_λ) 的 Q—过程，也有无穷多个间断的满足 (B_λ) 的 Q—过程。

证 由定理4.12，

$$R^{(n)}(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda) e_n' \bar{R}(\lambda)}{\lambda e_n' \bar{R}(\lambda) 1}, \qquad (n \in E)$$

是不断的满足 (B_λ) 的 Q—过程，由命题4.12 $\{e_n' \bar{R}(\lambda), \ n \in E\}$ 是线性无关的，又 $\bar{y}(\lambda) \neq 0$，所以 $n \neq m \Longrightarrow R^{(n)}(\lambda) \neq R^{(m)}(\lambda)$。因此上面给出的 Q—过程有无穷多个。仿之

$$R^{(n)*}(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda) e_n' \bar{R}(\lambda)}{c - \lambda e_n' \bar{R}(\lambda) 1}, \quad (n \in E) \quad c > 0,$$

给出了无穷多个满足 (B_λ) 的间断的 Q—过程。

定理4.13. 任给转强阵 Q。(1) 满足 (B_λ) 的 Q—过程恒存在，

且或者恰有一个或者有无穷多个，恰有一个的充要条件是$m^+=0$。
(2) 满足(B_λ)的不断的 Q—过程或者没有或者恰有一个或者有无穷多个，此外，

(a) Q非保守$\Longrightarrow$满足(B_λ)的不断的Q—过程不存在；

(b) Q保守，$m^+=0\Longrightarrow$满足(B_λ)的不断的 Q—过程恰有一个；

(c) Q保守，$m^+>0\Longrightarrow$满足(B_λ)的不断的Q—过程有无穷多个。

证 (1) 显然由定理4.3满足(B_λ)的Q—过程恒存在。若$m^+=0$，且设 $R(\lambda)$是任一满足 (B_λ) 之 Q—过程，则 $(\lambda I-Q)\cdot(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))=0$，由$0\leqslant\lambda(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))e_j\leqslant 1$ $(j\in E)$ 得$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)$，即满足$(B_\lambda)$之$Q$—过程唯一。若$m^+>0$，作

$$\bar{Q}=\begin{array}{c} \\ \Delta \\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Delta & E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ -Q1 & Q\end{pmatrix}\end{array},\qquad (\Delta\bar{\in}E),$$

则$\bar{Q}$是保守转强阵，且由$m^+>0$知

$$\ll(\lambda I-\bar{Q})y=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

有非0解：

$$y=\begin{array}{c}\Delta\\ E\end{array}\begin{pmatrix}0\\ y^*\end{pmatrix},\quad y^*\neq 0,\qquad y^*\in\mathscr{M}_1.$$

故由命题4,12有无穷多个满足(B)的不断的$\bar{Q}$—过程 $\{\tilde{P}^{(j)}(t),j\in J\}$，$J$ 是无穷集。由命题4.10若令 $P^{(j)}(t)=\tilde{P}^{(j)}(t)$ on E，则$\tilde{P}^{(j)}(t)$必有下述形状：

$$\tilde{P}^{(j)}(t)=\begin{array}{c} \\ \Delta \\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Delta & E\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-P^{(j)}(t)1 & P^{(j)}(t)\end{pmatrix}\end{array},$$

且$P^{(j)}(t)$是满足(B)的Q—过程。显然

$$\tilde{P}^{(j)}(t)\neq\tilde{P}^{(k)}(t)\Longrightarrow P^{(j)}(t)\neq P^{(k)}(t),$$

所以$\{P^{(j)}(t), j\in J\}$是无穷多个满足(B)的Q—过程。

(2) (a) 设Q非保守，由定理3.7满足(B_λ)的不断的Q—过程$R(\lambda)$不存在，

(b) 若Q保守，$m^+=0$，由定理4.5及命题4.7得知恰有一个满足(B_λ)的不断的Q—过程。

(c) 若Q保守，$m^+>0$，由命题4.12知满足(B_λ)的不断的Q—过程有无穷多个，定理证毕。

定理4.14.[1] 对任何转强阵Q，Q—过程唯一的充要条件是：

(1) $\inf\limits_{i\in E}(e_i'\lambda\bar{R}(\lambda)1)=f(\lambda)>0$, $(0<\lambda<\infty)$;

(2) $l^+=0$，或者Q有法。

关于条件(1)，我们指出两点：

(a) 条件(1)等价于下列形式上较弱的

(1)′ $\inf\limits_{i\in E}(e_i'\lambda_0\bar{R}(\lambda_0)1)=f(\lambda_0)>0$，(对某个$0<\lambda_0<\infty$)。

事实上，当$0<\lambda<\lambda_0$时，由$\bar{R}(\lambda)$对λ非升得$f(\lambda)\geqslant\inf\limits_{i\in E}(e_i'\lambda\bar{R}(\lambda_0)1)=\dfrac{\lambda}{\lambda_0}f(\lambda_0)>0$。当$\lambda\geqslant\lambda_0$时，由命题4.8有$f(\lambda)\geqslant f(\lambda_0)>0$。

(b) 条件(1)蕴含了$m^+=0$。

事实上，由$\bar{R}(\lambda)$满足(B_λ)可知$\bar{R}(\lambda)e_j$，$(j\in E)$是≪$(\lambda I-Q)y=e_j$，$y\geqslant0$≫的最小解。(显然$\bar{R}(\lambda)e_j$是解，若y也是解，再令$S=Q+D_p$，$\Pi(\lambda)=(\lambda I+D_p)^{-1}S$，$R_k(\lambda)=\Pi^k(\lambda)(\lambda I+D_p)^{-1}$，$\bar{R}(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_k(\lambda)$的意义如定理4.3，则有$y=\Pi(\lambda)y+(\lambda I+D_p)^{-1}e_j$，故$y\geqslant(\lambda I+D_p)^{-1}e_j=R_0(\lambda)e_j$，对$k$作归纳法可证$y\geqslant\sum\limits_{S=0}^{k}R_S(\lambda)e_j$，故$y\geqslant\bar{R}(\lambda)e_j$。)仿之，$\lambda\bar{R}(\lambda)1$是≪$(\lambda I-Q)y=\lambda1$，$y\geqslant0$≫的最小

---

1) 本定理来自文献[21]。为了便于读者，其证明也详细转述了。

解。若$m^+>0$，即≪$(\lambda I-Q)y=0, 0\leqslant y\leqslant 1$≫有非解$y^*$，则$\lambda\bar{R}(\lambda)1-\frac{f(\lambda)}{2}y^*$是

$$\ll(\lambda I-Q)y=\lambda 1,\ \ y\geqslant 0\gg$$

之解，由$\lambda\bar{R}(\lambda)1$是最小解知$\frac{f(\lambda)}{2}y^*=0$，而$y^*\neq 0$，故$f(\lambda)=0$。

现在我们来证明定理。

必要性。若$l^+>0$，且Q无法，则由定理4.11知满足(F)的Q—过程有无穷多个。若$\inf\limits_{i\in E}(e_i'\lambda\bar{R}(\lambda)1)=f(\lambda)=0$，则由命题4.9知：存在$\alpha'(\lambda)=\beta'\bar{R}(\lambda)\neq 0$，$\beta'\geqslant 0$，$\beta'1=\infty$，$\alpha'(\lambda)1<\infty$，使$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)1$是不断的$Q$—过程，故$\lambda R(\lambda)1=1$，而由$\inf\limits_{i\in E}(e_i'\lambda\bar{R}(\lambda)1)=0$得知$\lambda\bar{R}(\lambda)1\neq 1$，所以找出了二个不等的$Q$—过程。

充分性。设条件(1)、(2)成立，任取一个Q—过程$R(\lambda)$，往证$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)$。由定理4.1(i)$'$，直接计算有

$$R(\lambda)\geqslant(\lambda I+D_q)^{-1}(I+SR(\lambda)),\qquad(4.42)$$

由$\bar{R}(\lambda)$满足(B_λ)有：

$$\bar{R}(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}(I+S\bar{R}(\lambda)),\qquad(4.43)$$

所以

$$R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)\geqslant(\lambda I+D_q)^{-1}S(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)).\qquad(4.44)$$

令$S(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}S$是准转移阵，则(4.44)说明$R(\lambda)-\bar{R}(\lambda)$的每一行$e_i'(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))$ $(i\in E)$都是$S(\lambda)$—盈测。显然$e_i'S(\lambda)e_i=0$ $(i\in E)$，$\sum\limits_{i\in E}2^{-(i+1)}(r_{i,j}(\lambda)-\bar{r}_{i,j}(\lambda))\leqslant\sum\limits_{i\in E}2^{-(i+1)}<\infty$，$(j\in E)$，(其中$r_{i,j}(\lambda)=e_i'R(\lambda)e_j$，$\bar{r}_{i,j}(\lambda)=e_i'\bar{R}(\lambda)e_j$)，又由条件(1)知$m^+=0$，所以，由[71]有

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{R}(\lambda)F(\lambda),\ \ (F(\lambda)\geqslant 0).\qquad(4.45)$$

由 $\qquad 0\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\lambda\bar{R}(\lambda)1\leqslant 1$ 得

$$\lambda\bar{R}(\lambda)F(\lambda)1\leqslant 1,$$

再注意 $\lambda e_i'\bar{R}(\lambda)e_i>0$可得

$$F(\lambda)1<\infty. \tag{4.46}$$

若仍记$A(\lambda,\ \mu)=I+(\lambda-\mu)\bar{R}(\mu)$，则有

$$A(\lambda,\ \mu)\bar{R}(\lambda)=\bar{R}(\mu),\quad A(\lambda,\ \nu)A(\nu,\ \mu)=A(\lambda,\mu).$$

由于$R(\lambda)$、$\bar{R}(\lambda)$均满足予解方程式，把(4.45)代入$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0$可得：

$$\bar{R}(\lambda)F(\lambda)-\bar{R}(\mu)F(\mu)+(\lambda-\mu)[\bar{R}(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)+\bar{R}(\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)+\bar{R}(\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)]=0,$$

此即

$$-A(\mu,\ \lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)+\bar{R}(\lambda)F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)+(\lambda-\mu)\bar{R}(\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)=0,$$

亦即

$$-\bar{R}(\lambda)F(\mu)+\bar{R}(\lambda)F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)+(\lambda-\mu)\bar{R}(\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)=0.$$

用命题4.11由上式可得：

$$-F(\mu)+F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)+(\lambda-\mu)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)=0,$$

亦即

$$F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)=F(\mu)+(\mu-\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu). \tag{4.47}$$

由(4.47)、$F(\lambda)\geqslant 0$，$\bar{R}(\lambda)\geqslant 0$及$A(\lambda,\ \mu)=I+(\lambda-\mu)\bar{R}(\mu)$可证：

$$F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)\geqslant 0,\quad (\lambda>0,\ \mu>0).$$

由(4.46)有

$$F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)1=F(\mu)1+(\mu-\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)1. \tag{4.48}$$

而$F(\lambda)R(\mu)1=F(\lambda)\bar{R}(\mu)1+F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)1$，但

$$F(\lambda)R(\mu)1\leqslant\frac{1}{\mu}F(\lambda)1<\infty,\ (\lambda>0,\ \mu>0,\ )$$

故

$$F(\lambda)\bar{R}(\mu)1<\infty,\ F(\lambda)\bar{R}(\mu)F(\mu)1<\infty. \tag{4.49}$$

由(4.46)、(4.48)、(4.49)得：

$$F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)1<\infty,\quad (\lambda>0,\ \mu>0). \tag{4.50}$$

暂固定$\lambda>0$，令

$$G_\lambda(\mu)=F(\lambda)A(\lambda,\ \mu)\geqslant 0, \tag{4.51}$$

则由$A(\lambda,\ \mu)A(\mu,\ \nu)=A(\lambda,\ \nu)$可得：

$$G_\lambda(\mu)A(\mu,\ \nu)=G_\lambda(\nu). \tag{4.52}$$

(4.50)—(4.52)说明$G_\lambda(\mu)$的任一行$e_i'G_\lambda(\mu)$ $(i\in E)$都属于$\Gamma=\Gamma_1$ (Γ, Γ_1之定义见命题4.6)。若Q有法，当然Q—过程唯一，充分性证毕。若Q无法，则由条件(2)知：必有$l^+=0$，即$\mathscr{L}_\lambda$只有0解，于是由Γ_1的定义可知：

$$G_\lambda(\mu)=B(\lambda)\bar{R}(\mu),\ B(\lambda)\geqslant 0,\ B(\lambda)\bar{R}(\mu)1<\infty. \tag{4.53}$$

所以

$$G_\lambda(\mu)(\mu I-Q)=B(\lambda)\bar{R}(\mu)(\mu I-Q)=B(\lambda). \tag{4.54}$$

(上面使用结合律是合法的，因为 $\bar{R}(\mu)S<\infty$，证明见定理4.3)在(4.53)、(4.54)中取$\lambda=\mu$，并注意(4.51)可得：

$$F(\lambda)=G_\lambda(\lambda)=B(\lambda)\bar{R}(\lambda), \tag{4.55}$$

$$F(\lambda)(\lambda I-Q)=B(\lambda). \tag{4.56}$$

在(4.47)两边右乘以$(\mu I-Q)$并注意$\bar{R}(\lambda)$满足(F_λ) 及$A(\lambda,\ \mu)$之定义再用(4.56)可得

$$B(\lambda)=B(\mu)+(\mu-\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu). \tag{4.57}$$

由 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\bar{R}(\lambda)-I)=Q$,

并用(4.45)可得 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2\bar{R}(\lambda)F(\lambda)=0$,

但 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{R}(\lambda)=I$, $\bar{R}(\lambda)\geqslant 0$, $F(\lambda)\geqslant 0$，故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda F(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=0. \tag{4.58}$$

而由(4.57)知：$\lambda_1\geqslant\lambda_2>0\Longrightarrow B(\lambda_1)\leqslant B(\lambda_2)$。故

$$\lim_{\lambda\to\infty}B(\lambda) \tag{4.59}$$

存在且有限。而(4.56)即是

$$F(\lambda)(\lambda I+D_q)=F(\lambda)S+B(\lambda), \tag{4.60}$$

所以由(4.58)—(4.60)得：

$$B(\lambda)\downarrow 0,\ (\lambda\uparrow\infty). \tag{4.61}$$

如能证明$B(\lambda)=0$，$(\lambda>0)$，则由(4.45)及(4.55) 知$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)$，即$Q$—过程唯一。

由(4.46)及(4.55)及定理的条件(1)有

$$\infty>\lambda F(\lambda)\mathbf{1}=\lambda B(\lambda)\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}\geqslant f(\lambda)(B(\lambda)\mathbf{1}),$$

$$B(\lambda)\mathbf{1}<\frac{\lambda}{f(\lambda)}F(\lambda)\mathbf{1}<\infty,\ (\lambda>0). \tag{4.62}$$

从而由$\bar{R}(\lambda)$满足予解方程式可得：

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)&=(\mu-\lambda)B(\lambda)\bar{R}(\lambda)\bar{R}(\mu)\\&=B(\lambda)(\bar{R}(\lambda)-\bar{R}(\mu))=B(\lambda)\bar{R}(\lambda)-B(\lambda)\bar{R}(\mu).\end{aligned} \tag{4.63}$$

又由(4.45).(4.62)及定理条件(1)有

$$\begin{aligned}\mathbf{1}&\geqslant\mu R(\mu)\mathbf{1}=\mu\bar{R}(\mu)\mathbf{1}+\mu\bar{R}(\mu)F(\mu)\mathbf{1}\\&\geqslant f(\mu)\mathbf{1}+f(\mu)\bar{R}(\mu)B(\mu)\mathbf{1},\ (\mu>0).\end{aligned} \tag{4.64}$$

所以

$$\bar{R}(\mu)B(\mu)\mathbf{1}\leqslant\left(\frac{1}{f(\mu)}-1\right)\mathbf{1},(\mu>0). \tag{4.65}$$

由(4.62)、(4.65)得：

$$B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)\mathbf{1}\leqslant\left(\frac{1}{f(\mu)}-1\right)B(\lambda)\mathbf{1}<\infty. \tag{4.66}$$

由(4.57)、(4.62)、(4.63)、(4.66)得

$$\begin{aligned}B(\lambda)\mathbf{1}&=B(\mu)\mathbf{1}+(\mu-\lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)\mathbf{1}\\&=B(\mu)\mathbf{1}+B(\lambda)(\bar{R}(\lambda)-\bar{R}(\mu))B(\mu)\mathbf{1}\end{aligned}$$

$$=B(\mu)1+B(\lambda)\bar{R}(\lambda)B(\mu)1-B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1 \tag{4.67}$$

由(4.62)、(4.66)可知上式右边三项都是有限的，故由 $B(\mu)\downarrow 0$ (当$\mu\uparrow\infty$)，并用控制收敛定理可得：

$$\lim_{\mu\to\infty}(B(\mu)1)=(\lim_{\mu\to\infty}B(\mu))1=0, \tag{4.68}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}(B(\lambda)\bar{R}(\lambda)B(\mu)1)=B(\lambda)\bar{R}(\lambda)(\lim_{\mu\to\infty}B(\mu)1)=0, \tag{4.69}$$

若再注意$\bar{R}(\mu)\downarrow 0$(当$\mu\uparrow\infty$)，再用(4.68)及控制收敛定理可得

$$\lim_{\mu\to\infty}(B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1)=B(\lambda)(\lim_{\mu\to\infty}\bar{R}(\mu)B(\mu)1)=0. \tag{4.70}$$

在(4.67)中令$\mu\to\infty$，并注意(4.68)—(4.70)得$B(\lambda)1=0$，$(\lambda>0)$，此即$B(\lambda)=0$，$(\lambda>0)$。定理证毕。

下面我们改变研究主题。设Q是有法的转强阵，从而Q—过程唯一，它就是最小Q—过程$\bar{P}(t)$。有些情况，我们对$\bar{P}(t)$并不感兴趣，只对

$$\bar{\Pi}=\lim_{t\to\infty}\bar{P}(t)$$

感兴趣。如何通过Q，而不经中间对象$\bar{P}(t)$直接求出$\bar{\Pi}$？

引理4.1. 设$g(y)$是$[0,\infty)$上的非负实值函数，在$[0,A]$上勒贝格可积，(A为任意实数)，令

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xy}g(y)dy,\quad (x>0),$$

若$\lim\limits_{y\to\infty}g(y)=g(\infty)$存在且有限，则$\lim\limits_{x\to 0+}xf(x)=g(\infty)$，

若$\lim\limits_{y\to 0+}g(y)=g(0+)$存在且有限，则$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=g(0+)$。

证 因为

$$xf(x)-g(\infty)=x\int_0^\infty e^{-xy}(g(y)-g(\infty))dy,$$

所以任给$\varepsilon>0$，可取$A>0$，使$|g(y)-g(\infty)|<\varepsilon$，$(y\geq A)$，于是

$$|xf(x)-g(\infty)|\leqslant x\int_0^A e^{-xy}|g(y)-g(\infty)|dy+\varepsilon,$$

$$(x>0).$$

令$x\to 0+$并注意$\varepsilon>0$之任意性可得：

$$\lim_{x\to 0+}xf(x)=g(\infty).$$

仿上，

$$xf(x)-g(0+)=x\int_0^\infty e^{-xy}(g(y)-g(0+))dy,$$

任给$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使

$$|g(y)-g(0+)|<\varepsilon,\ y\in(0,\ \delta),$$

则

$$|xf(x)-g(0+)|\leqslant\varepsilon+x\int_\delta^\infty e^{-xy}|g(y)-g(0+)|dy$$

$$\leqslant\varepsilon+xe^{-\frac{1}{2}\delta x}\int_\delta^\infty e^{-\frac{xy}{2}}|g(y)-g(0+)|dy,\ (x>0),$$

令$x\to\infty$并注意$\varepsilon>0$之任意性可得：

$$\lim_{x\to\infty}xf(x)=g(0+).$$

定理4.15. 设Q是有法的转强阵，若$\alpha'\geqslant 0$，$\alpha'\in(l)$，则$\alpha'Q=0\Longleftrightarrow\alpha'\bar{\Pi}=\alpha'$。

证 设$\alpha'\geqslant 0$，$\alpha'\in(l)$，$\alpha'\bar{\Pi}=\alpha'$。则由本节前部所述的准转概阵性质(II)有

$$\alpha'=\alpha'\bar{\Pi}=\alpha'\bar{\Pi}\bar{P}(t)=\alpha'\bar{P}(t),\ (t\geqslant 0).$$

取拉氏变换得

$$\alpha'=\lambda\alpha'\bar{R}(\lambda),\ (\lambda>0).\qquad(4.71)$$

由$\bar{R}(\lambda)$满足(F_λ)得

$$\bar{R}(\lambda)(\lambda I+D_q)=\bar{R}(\lambda)S+I,\ (\lambda>0).\qquad(4.72)$$

把(4.72)两边左乘以α'并注意(4.71)得

$$\frac{1}{\lambda}\alpha'D_q=\frac{1}{\lambda}\alpha'S,\ (\lambda>0).$$

此即$\alpha'Q=0$。

再设$\alpha'\geqslant 0$，$\alpha'\in(l)$，$\alpha' Q=0$。则

$$\alpha'(\lambda I-Q)=\lambda\alpha'\geqslant 0,$$

由命题4.2得

$$\alpha'\geqslant\lambda\alpha'\bar{R}(\lambda). \tag{4.73}$$

由Q有法知$\mathbf{1}-\lambda\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}=0$，故

$$\alpha'\mathbf{1}=(\lambda\alpha'\bar{R}(\lambda))\mathbf{1}. \tag{4.74}$$

由(4.73)、(4.74)得

$$\alpha'=\lambda\alpha'\bar{R}(\lambda),\ (\lambda>0). \tag{4.75}$$

但是，由引理4.1有

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda\bar{R}(\lambda)=\lim_{t\to\infty}\bar{P}(t)=\bar{\Pi}, \tag{4.76}$$

又因为

$$\lambda\bar{R}(\lambda)\geqslant 0,\ \lambda\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1},\ \alpha'\in(l),$$

所以在(4.75)中令$\lambda\to 0+$，并注意(4.76)再用控制收敛定理即可得$\alpha'=\alpha'\bar{\Pi}$。

定理4.16. 设Q是任一转强阵，则$\bar{\Pi}Q=Q\bar{\Pi}=0$。

证 因为$\bar{P}'(t)=Q\bar{P}(t)$，$(t\geqslant 0)$(此处$\bar{P}'(t)$表$\bar{P}(t)$对t的微商)，所以在上式中令$t\to\infty$并利用本节前部所述的准转概阵性质(VI)及控制收敛定理可得：

$$0=Q\bar{\Pi}.$$

又因为$\bar{\Pi}^2=\bar{\Pi}$，所以用定理4.15（注意：定理4.15的充分性部份并不要求Q是有法的）得

$$\bar{\Pi}Q=0.$$

定理4.17. 任给转强阵Q，设$P(t)$是任一Q—过程，$\Pi=\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$，则$\Pi$具有下述结构：

$$\Pi=\begin{array}{c} \\ N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N & R_1 & R_2\cdots\cdots & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \alpha(1)\pi'(1) & \alpha(2)\pi'(2) & \cdots \\ 0 & \mathbf{1}\pi'(1) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{1}\pi'(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right) \end{array},$$

$E=N\cup R=N\cup(\bigcup_m R_m)$，$N\cap R=\varnothing$，$N$和$R$可以是空集，$R_k\cap R_m=\varnothing(k\neq m)$，$a(i)\geqslant 0$是列向量，其维数与 N 中元素的个数同，$\pi'(i)$是行向量，其维数与R_i中元素的个数同，且 $\pi'(i)>0$，$\pi'(i)1=1$，$\Pi 1\leqslant 1$。

证 仿第一篇命题4.3

设Q是有法的转强阵。由定理4.15有：当$\alpha'\geqslant 0$，$\alpha'\in(l)$时，

$$\alpha'Q=0\Longleftrightarrow\alpha'\bar{\Pi}=\alpha'.$$

若再注意$\bar{\Pi}$有定理4.17中的结构，就可看出：

$$\ll\alpha'Q=0,\ \alpha'\geqslant 0,\ \alpha'\in(l)\gg$$

的通解必具有下述形式：

$$\alpha'=\begin{pmatrix} N & R_1 & R_2 & \cdots \\ 0, & C_1\pi'(1) & C_2\pi'(2), & \cdots\end{pmatrix},$$

其中C_i是非负实数。$\sum_i C_i<\infty$，所以，解方程式

$$\ll\alpha'Q=0,\ \alpha'\geqslant 0,\ \alpha'\in(l)\gg$$

可以看出：其通解中那些必为0的分量所处的位置就是N，也可看出R_i及对应的$\pi'(i)$。所以，只须定出$a(i)$，$\bar{\Pi}$就完全求出来了。

定理4.18。设Q是任一转强阵，则

(i) $y\geqslant 0$，$y\in(m)$，$Qy=0\Longrightarrow y\geqslant\bar{\Pi}y$；

(ii) $a(1)$是

$$(\mathrm{Z}):\quad \ll 0=Q\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots\end{pmatrix}\begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots\end{matrix},\ z\geqslant 0,\ z\in(m)\gg$$

的最小解$y_{\min}$中所对应的z，即$a(1)=y_{\min}$ on N。（其它$a(i)$求法类似）。

证 (i) 因为$Qy=0$，$0\leqslant y\in(m)$，所以

$$(\lambda I-Q)y=\lambda y,\ (\lambda>0),$$

因此由命题4.2得

$$y \geqslant \lambda \bar{R}(\lambda) y, \quad (\lambda > 0). \tag{4.77}$$

在(4.77)中令$\lambda \to \infty$并注意(4.76)及$0 \leqslant y \in (m)$ 再用法都引理可得

$$y \geqslant \liminf_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{R}(\lambda) y \geqslant (\liminf_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{R}(\lambda)) y = \bar{\Pi} y.$$

(ii) 由定理4.16有$Q\bar{\Pi} = 0$。更有$Q\bar{\Pi}e_j = 0 (j \in R_1)$，此即

$$Q \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0,$$

显然$0 \leqslant a(1) \in (m)$，所以

$$y = \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

是方程(Z)之解。再设

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

也是方程(Z)之解，则

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \geqslant \bar{\Pi} \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \geqslant \bar{\Pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix},$$

定理证毕。

下面我们讨论对一类特殊的有法的转强阵Q来说，其对应的$\bar{\Pi}$如何求。

我们称$Q = (q_{ij}, i, j \in E)$是可约的，如果存在E的一个真子

集F，$F\subset E$，$F\neq E$，使$q_{i,j}=0(i\in F,\ j\overline{\in} F)$。否则称 Q 是不可约的。

定理4.19. 若Q是不可约的转强阵，则有：或者$E=N$（这时$\overline{\Pi}=0$）或者$E=R_1$（这时$\overline{\Pi}=1\pi'(1)$）。

证 谬设$E=N\cup(\bigcup_{m} R_m)$中$R_1\neq\emptyset$，$N\cup\left(\bigcup_{m>1} R_m\right)\neq\emptyset$，则$\overline{\Pi}$中必有一行 $e_i'\overline{\Pi}$是如下形状：

$$\begin{array}{ccc} & R_1 & N\cup(\bigcup_{m>1}R_m) \\ (& \pi'(1) & 0 \quad). \end{array}$$

记

$$\overline{P}(t)=\begin{array}{c} \\ R_1 \\ N\cup(\bigcup_{m>1}R_m) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} R_1 & N\cup(\bigcup_{m>1}R_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \end{array},$$

在$\overline{\Pi}\ \overline{P}(t)=\overline{\Pi}$中取前面指出的那一行得

$e_i'\ \overline{\Pi}\ \overline{P}(t)=l_i'\overline{\Pi}$，此即

$$(\pi'(1),\ 0)\begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix}=(\pi'(1),\ 0).$$

所以

$$\pi'(1)B(t)=0.$$

但是$\pi'(1)>0$，从而$B(t)=0$，故

$$Q=\begin{pmatrix} A'(0) & 0 \\ C'(0) & D'(0) \end{pmatrix},$$

此即Q是可约的。定理证毕。

定理4.20. 设Q是有法的不可约转强阵，则

(i) $\ll\alpha'Q=0,\ \alpha'\geqslant 0,\ \alpha'\in(l)\gg$只有0解$\Longrightarrow\overline{\Pi}=0$；

(ii) $\ll a'Q=0,\ a'\geqslant 0,\ a'\in(l)\gg$ 有非0解$\Longrightarrow$其通解必为$C\pi'$，$\pi'>0$，$\pi'\mathbf{1}=1$，这时 $\bar{\Pi}=\mathbf{1}\pi'$。

证 由定理4.17、4.19立得此定理。

§5. 生灭过程

在这一节中，我们将要研究一类在实际问题中较为常见的特殊的马尔可夫过程—生灭过程。

假定有一个固定的服务机构，来到该机构请求服务的顾客具有下列规律：

(1) 时齐性，即是对任何$t>0$，$a\geqslant 0$，在$[a,\ a+t)$内来到k个顾客的概率$v_k(t)$与a无关，而且$\sum\limits_{k=0}^{\infty}v_k(t)\equiv 1$；

(2) 无后效性，即是在$[a,\ a+t)$内来到k个顾客的概率与时刻a以前曾经来到过多少顾客无关；

(3) 普通性，即是当$t\to 0^+$时，

$$\psi(t)\equiv\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)=0(t).$$

若令X_t是$[0,\ t)$内来到的顾客的数目，则容易证明：$P(X_{s+t}=j|X_s=i)=v_{j-i}(t)$，(当$k<0$，定义$v_k(t)=0$，$P(A|M)$表条件概率) 且下述$P(t)$是转概阵：

$$P(t)=\begin{pmatrix} v_0(t) & v_1(t) & \cdots \\ 0 & v_0(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

下面我们把$v_k(t)$算出来。由时齐性及无后效性得知：

$$v_0(t)=(v_0(1))^t,\ (t\geqslant 0).$$

以下假定$0<v_0(1)<1$，故$v_0(t)$可表为：

$$v_0(t)=e^{-\lambda t},\ 0<\lambda<\infty.$$

对$k\geqslant 1$，利用时齐性、无后效性、普通性可得：

$$v_k(t+\tau)=v_k(t)v_0(\tau)+v_{k-1}(t)v_1(\tau)+o(\tau),$$
$$(\tau\to 0^+),$$

但是，

$$v_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}=1-\lambda\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0),$$
$$v_1(\tau)=1-v_0(\tau)-\psi(\tau)=\lambda\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0),$$

所以

$$\frac{v_k(t+\tau)-v_k(t)}{\tau}=\lambda(v_{k-1}(t)-v_k(t))+o(1),$$
$$(\tau\to 0)。$$

因此，令$\tau\to 0$得：（此处$v_k'(t)$表示对t求微商）

$$v_k'(t)=\lambda(v_{k-1}(t)-v_k(t)),\quad (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

令

$$\Phi(t,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t)x^k,\quad (|x|\leqslant 1)$$

为$\{v_k(t),\ k\geqslant 0\}$的母函数，则有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}v_{k-1}(t)x^k-\lambda\Phi=\lambda(x-1)\Phi。$$

（注意：由定理3.6知$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|v_k'(t)|\leqslant 2|v_0'(0)|$，故逐项微商是合法的。）

即是

$$\frac{\partial\log\Phi}{\partial t}=\lambda(x-1)。$$

故 $\log\Phi(t,\ x)-\log\Phi(0,\ x)=\lambda(x-1)t$。

但是 $\Phi(0,\ x)=v_0(0)=1,\quad (|x|\leqslant 1)$，

所以

$$\Phi(t,\ x)=e^{-\lambda(x-1)t}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x^k。$$

亦即 $v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$，$(k\geqslant 0)$，

从而其转强阵为

$$Q=P'(0)=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

如果我们假定每一个顾客的服务时间T服从负指数分布：

$$P(T<v)=\begin{cases}0, & v\leqslant 0, \\ 1-e^{-\mu v}, & v>0,\end{cases}$$

则有

$$P(T\geqslant v+c\,|\,T\geqslant c)=P(T\geqslant v).$$

上述等式的直观意义是："剩余的服务时间"仍旧服从T所服从的负指数分布。

在上述种种假定下，如果还假设不同的顾客的服务时间是相互独立的，令Y_t是时刻t此服务机构中所有的顾客数目，则可以证明：$P(Y_{s+t}=j\,|\,Y_s=i)=p^*_{i,j}(t)$，$(i,\ j\geqslant 0)$，且

$$P^*(t)=(p^*_{i,j}(t),\ ij\geqslant 0)$$

是转概阵，

$$Q^*=P^{*\prime}(0)=(q^*_{i,j}i,\ j\geqslant 0)$$

为其转强阵。$P^*(t)$不易算出，而Q^*到是容易算出。

由于在$[t,\ t+\tau)$内来到k个顾客的概率$v_k(t)$满足下述关系：

$$v_0(\tau)=1-\lambda\tau+o(\tau),\ (\tau\to 0),$$

$$v_1(\tau)=\lambda\tau+o(\tau),\ (\tau\to 0),$$

$$\psi(\tau)=\sum_{k=2}^{\infty}v_k(\tau)=o(\tau),\ (\tau\to 0),$$

又由于服务时间服从负指数分布，所以在时刻t正在服务的k个顾客在$t+\tau$恰有i个顾客已经结束了其服务的概率$u_i(\tau)$满足下述关系：

$$u_0(\tau)=e^{-k\mu\tau}=1-k\mu\tau+o(\tau),\ (\tau\to 0),$$

$$u_1(\tau)=k\mu\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0),$$
$$u_i(\tau)=o(\tau),\quad (i>1,\ \tau\to 0).$$
基于$v_k(t)$与$u_i(\tau)$满足上述两组关系，所以
$$p^*_{0,0}(\tau)=1-\lambda\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0),$$
$$p^*_{k,k}(\tau)=1-(k\mu+\lambda)\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0,\ k\geqslant 1),$$
$$p^*_{k,k+1}(\tau)=\lambda\tau+o(\tau),\quad (\tau\to 0,\ k\geqslant 0),$$
$$p^*_{k,k-1}(\tau)=k\mu\tau,\quad (\tau\to 0,\ k\geqslant 1),$$
$$p^*_{i,k}(\tau)=o(\tau),\quad (\tau\to 0,\ |i-k|>1).$$
因此
$$Q^*=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

在这一节中，我们就要研究§ 3 和§ 4 中的一般理论用到这类具体的转强阵 Q^*上去有何更深刻更具体的结果。例如，我们的$P^*(t)$并没求出，如果能找出Q^*的有法性的充要条件，那么，也就找出了 $P^*(t)=\overline{P}(t)$ （$\overline{P}(t)$如定理4.3所构造，只不过把Q代之以Q^*而已），再如，对于这种类型的转强阵，其$l^+=?$，$m^+=?$，其全体Q^*—过程如何构造…？

下面我们研究的转强阵Q，比Q^*稍为一般一些。

定义5.1. 称具有下述形式的矩阵：
$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$
$$\lambda_0\geqslant 0,$$
$$\lambda_1,\cdots,\ \lambda_n,\cdots>0,$$
$$\mu_1,\cdots,\ \mu_n,\cdots>0,$$
（即是$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\geqslant 0)$，$q_{0,0}=-\lambda_0$，$q_{0,1}=\lambda_0$，$q_{0,j}=0$，（$j\geqslant$

2)，当$i\geqslant 1$时，$q_{i,i}=-(\lambda_i+\mu_i)$，$q_{i,i+1}=\lambda_i$，$q_{i,i-1}=\mu_i$，$q_{i,j}=0$，($|j-i|>1$))为生灭过程转强阵。显然上述$Q$是保守的。

以后如不特别声明，在这一节中所涉及的 Q，均为生灭过程转强阵。

在这一节中，我们要把§4中的一般理论用到生灭过程转强阵上来。

引理5.1. 给定实数 $z_1>z_0\geqslant 0$，及$f_n>0$，$g_n>0$，($n\geqslant 1$)，用递推公式：

$$z_{n+1}-z_n=f_nz_n+g_n(z_n-z_{n-1}),\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

来定义$\{z_n,\ n\geqslant 0\}$。(显然$0\leqslant z_0<z_1<z_2<\cdots$)则$\sup\limits_{n\geqslant 0}z_n<\infty$ 的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_n<\infty. \tag{5.1}$$

证 令$u_n=z_{n+1}-z_n$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，

则 $$u_n=f_nz_n+g_nu_{n-1},\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

再令

$$v_n=\frac{u_n}{g_1g_2\cdots g_n},\quad (n\geqslant 1),\quad v_0=0,$$

则 $$g_1g_2\cdots g_nv_n=f_nz_n+g_1\cdots g_nv_{n-1},\quad (n\geqslant 1),$$

即是

$$v_n-v_{n-1}=\frac{f_nz_n}{g_1\cdots g_n},\quad (n\geqslant 1).$$

所以

$$v_n=v_0+\sum_{k=1}^{n}(v_k-v_{k-1})=z_1-z_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{f_kz_k}{g_1\cdots g_k}.$$

因此 $$u_n=g_1\cdots g_nv_n$$

$$=g_1\cdots g_n(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_nz_k,\quad (n\geqslant 1).$$

亦即

$$z_{n+1}-z_n=g_1\cdots g_n(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_nz_k,\quad (n\geqslant 1).$$

必要性。因为

$$z_{n+1}-z_n\geqslant z_1\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_2-z_1\geqslant z_1f_1g_2,$$

所以，把上述诸不等式相加即得：

$$z_{n+1}\geqslant z_1+z_1\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}f_kg_{k+1}\cdots g_l,\quad (n\geqslant 1),$$

因为 $z_1>0$, $\sup\limits_{n\geqslant 0} z_n<\infty$，所以

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}f_kg_{k+1}\cdots g_l<\infty.$$

充分性。因为

$$z_{n+1}-z_n=g_1\cdots g_n(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_nz_k$$

$$\leqslant\left(g_1\cdots g_n+\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_n\right)z_n,\quad (n\geqslant 1),$$

所以，若记上述不等式右端括号内之数为F_n，则有

$$z_{n+1}\leqslant(F_n+1)z_n,\qquad (n\geqslant 1).$$

逐次递推得：

$$z_{n+1}\leqslant(1+F_n)(1+F_{n-1})\cdots(1+F_1)z_1$$

$$\leqslant z_1e^{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k},\quad (n\geqslant 1).$$

若
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_kg_{k+1}\cdots g_n<\infty,\qquad (5.1)$$

更有
$$\sum_{n=1}^{\infty}f_1g_2\cdots g_n<\infty,$$

则
$$\sum_{n=1}^{\infty} g_1 \cdots g_n < \infty. \qquad (5.2)$$

由(5.1)及(5.2)得知：
$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k < \infty.$$

但是
$$z_{n+1} \leqslant z_1 e^{\sum_{k=1}^{n} F_k}, \quad (n \geqslant 1),$$

所以
$$\sup_{n \geqslant 0} z_n < \infty.$$

下面我们对生灭过程转强阵Q来研究空间$\mathscr{M}_\lambda$和$\mathscr{L}_\lambda$。

定理5.1. 对生灭过程转强阵Q来说，m^+或则为0，或则为1。而且下列三命题等价：

(1) Q是有法的；

(2) $m^+=0$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty$.

证 解方程式：

$\ll(\lambda I-Q)z=0,\ z\geqslant 0,\ z\neq 0\gg,\ (\lambda>0)$,

即是解

$$\begin{aligned}&(\lambda+\lambda_0)z_0=\lambda_0 z_1,\\&(\lambda+\lambda_1+\mu_1)z_1=\mu_1 z_0+\lambda_1 z_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(\lambda+\lambda_n+\mu_n)z_n=\mu_n z_{n-1}+\lambda_n z_{n+1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\quad (\lambda>0),\quad z=\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\\vdots\\z_n\\\vdots\end{pmatrix},$$

$$z\geqslant 0,\ z\neq 0.$$

当$\lambda_0=0$时：上述方程组中z_0必为0，z_1可为>0的任一数(若$z_1=0$，必有$z_n=0$，$n\geqslant 0$)，而诸z_n满足：

$$\lambda_n(z_{n+1}-z_n)=\lambda z_n+\mu_n(z_n-z_{n-1}),\ (n\geqslant 1).$$

当$\lambda_0>0$时：z_0可为>0的任一数（否则一切$z_n=0$,），诸z_n满足：

$$z_1=z_0+\frac{\lambda}{\lambda_0}z_0>z_0,$$

$$\lambda_n(z_{n+1}-z_n)=\lambda z_n+\mu_n(z_n-z_{n-1}),\ (n\geqslant 1).$$

所以，无论$\lambda_0=0$或者$\lambda_0>0$，都有：上述方程组之通解为：

$$\begin{cases} z_1>z_0\geqslant 0, \\ z_{n+1}-z_n=\dfrac{\lambda}{\lambda_n}z_n+\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}(z_n-z_{n-1}),\ n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{5.3}$$

由此看出：$m^+=0$或者1，而且$m^+=0$即

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$$

只有 0 解的充要条件是(5.3)中确定的$\{z_n,\ n\geqslant 0\}$是无界序列(即$z\bar{\in}(m)$)。但是，由引理5.1得知：(5.3) 中所确定的$\{z_n,\ n\geqslant 0\}$是无界序列的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda_k}\frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}}\cdots\frac{\mu_n}{\lambda_n}=\infty,\ (\lambda>0).$$

又因为Q是保守的，所以，由定理4.4 (iii)及定理4.6 (ii)得知：

$$Q\text{是有法的}\Longleftrightarrow m^+=0.$$

至此，定理5.1证毕。

定理5.2. 对生灭过程转强阵Q来说，l^+或则为0，或则为1。而且$l^+=0$的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_{k+1}}\frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}=\infty.$$

证 解方程式

$$\ll a'(\lambda I-Q)=0,\ a'\geqslant 0,\ a'\neq 0\gg,\ (\lambda>0),$$

即是解

$$(\lambda+\lambda_0)a_0=\mu_1 a_1,\ (\lambda>0),$$

$$(\lambda+\lambda_n+\mu_n)\alpha_n=\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}+\mu_{n+1}\alpha_{n+1}, \quad (n\geqslant 1), \ (\lambda>0), \tag{5.4}$$

其中

$$\alpha'=(\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots).$$

把(5.4)中诸式对$n=0, 1, \cdots, m$加起来得：

$$\begin{aligned}&(\lambda(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m)+(\lambda_0\alpha_0+\cdots+\lambda_m\alpha_m)\\&+(\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_m\alpha_m)\\=&(\lambda_0\alpha_0+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1})+(\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_{m+1}\alpha_{m+1}).\end{aligned}$$

令$z_m=(\alpha_0+\cdots+\alpha_m)$，代入上式即得：

$$z_{m+1}-z_m=\frac{\lambda}{\mu_{m+1}}z_m+\frac{\lambda_m}{\mu_{m+1}}(z_m-z_{m-1}), \ (m\geqslant 1).$$

由此看出：$l^+=0$或者1，而且$l^+=0$，即是

$$\ll\alpha'(\lambda I-Q)=0, \ \alpha'\geqslant 0, \ \alpha'\in(l)\gg$$

只有零解的充要条件是：$\{z_n, \ n\geqslant 0\}$是无界序列，再利用引理5.1得知：$\{z_n, \ n\geqslant 0\}$是无界序列的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\mu_{k+1}}\frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}=\infty.$$

至此，定理5.2证毕。

当$\lambda_0>0$时，显然有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty\\\Longleftrightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty\\\Longleftrightarrow&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty;\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_{k+1}}\frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}=\infty$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mu_{k+1}}\frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}=\infty$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mu_{k+1}}\frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}=\infty。$$

所以，若令

$$\rho_n=\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n},\ (n\geqslant 1),\ \rho_0=1,$$

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n},$$

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}{\mu_{k+1}\cdots\mu_n},$$

则有

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\mu_1\cdots\mu_k}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}}{\lambda_0\cdots\lambda_n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}\sum_{k=0}^{n}\rho_k,$$

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\rho_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k\rho_k}.$$

由定理4.12看出：对一个保守的转强阵Q来说，若$m^+=1$，则只要找出$g(\lambda)$来，其全部Q—过程就知道了。而今生灭过程的转强阵Q是保守的，所以，求全体Q—过程的问题就化为求$g(\lambda)$了。

下面我们首先求：（在$\lambda_0>0$下）

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$$

的通解。

若注意

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0\gg$$

等价于

$$\begin{pmatrix} \lambda+\lambda_0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -\mu_1 & \lambda+\lambda_1+\mu_1 & -\lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -\mu_2 & \lambda+\lambda_2+\mu_2 & -\lambda_1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots -\mu_{n-1} & \lambda+\lambda_{n-1}+\mu_{n-1} & -\lambda_{n-1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$=0$，$(n\geqslant 1)$，

$$y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}\geqslant 0,$$

则

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0\gg$$

的通解为：

$$y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix},\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}},\ (n\geqslant 1),\ y_0\geqslant 0,$$

$$A_n(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+\lambda_0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mu_1 & \lambda+\lambda_1+\mu_1 & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_2 & \lambda+\lambda_2+\mu_2 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & -\mu_{n-1} & \lambda+\lambda_{n-1}+\mu_{n-1} \end{vmatrix}.$$

又因为 $\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\neq 0\gg$ 的解

$$y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

具有性质：$y_n>y_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$，所以

$$\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}\geqslant\frac{A_{n-1}(\lambda)}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-2}},\ (n\geqslant 2),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}$$

存在，记此极限为$\overline{A}(\lambda)$。因此$\overline{A}(\lambda)<\infty\Longleftrightarrow m^+=1$。故$m^+=1$时，有：

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$$

的通解为

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix},\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}},\quad (n\geqslant 1),\quad y_0\geqslant 0.$$

故有下述

定理5.3. 设Q是生灭过程转强阵，$\lambda_0>0$。若$R<\infty$，(即是$m^+=1$，亦即Q是无法的，)则

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)\gg$$

的通解为

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix}\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}},\quad (n\geqslant 1),\quad y_0\geqslant 0.$$

仿之，有

定理5.4. 设Q是生灭过程转强阵，$\lambda_0>0$。若$W<\infty$，(即是$l^+=1$，)则

$$\ll\alpha'(\lambda I-Q)=0,\ \alpha'\geqslant 0,\ \alpha'\in(l)\gg$$

的通解为

$$\alpha'=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots),$$

$$\alpha_n=\frac{A_n(\lambda)\alpha_0}{\mu_1\cdots\mu_n},\quad (n\geqslant 1),\quad \alpha_0\geqslant 0.$$

系1. $Qy=0$ 的通解为

$$y=y_0\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

$\alpha' Q = 0$ 的通解为

$$\alpha' = \alpha_0(1,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots).$$

证 $Qy=0$ 的通解为

$$y = y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

乃是显然的．又因为

$$(\lambda I - Q)y = 0$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix},\quad y_n = \frac{A_n(\lambda) y_0}{\lambda_0 \cdots \lambda_n},\ (n \geqslant 1).$$

故 $A_n(0) = \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}$．于是，由定理5.4得知

$$\alpha' Q = 0$$

的通解

$$\alpha' = \alpha_0(1,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots).$$

定理5.5． 设Q是生灭过程转强阵，$\lambda_0 > 0$．若$m^+ = 1$，(即是$R < \infty$，亦即 Q 是无法的，亦即$\bar{A}(\lambda) < \infty$,) 则

$$\bar{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} y_0(\lambda) \\ y_1(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},\quad y_0(\lambda) = \frac{1}{\bar{A}(\lambda)},$$

$$y_n(\lambda) = \frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \bar{A}(\lambda)},\ (n \geqslant 1).$$

证 由定理5.3得知

$$\ll (\lambda I - Q)y = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \gg$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix},\quad y_n = \frac{A_n(\lambda) y_0}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}},\ (n \geqslant 1),\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

又因为$n\to\infty$时，

$$\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}$$

单调上升到$\bar{A}(\lambda)$，所以，

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的通解为

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix},\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}},\ (n\geqslant 1),\ \ 0\leqslant y_0\leqslant\frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

因此，

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的最大解为

$$y_{\max}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix},\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}\bar{A}(\lambda)},\ (n\geqslant 1),$$

$$y_0=\frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

但是，

$$\ll\Pi(\lambda)y=y,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

与

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的解相同，（其中$\Pi(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}S$ 如定理4.4中所定义，）而定理4.4指出$\bar{y}(\lambda)$是

$$\ll\Pi(\lambda)y=y,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的最大解，所以

$$\bar{y}(\lambda)=y_{\max}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix},\quad y_n=\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}\bar{A}(\lambda)},\ (n\geqslant 1),$$

$$y_0 = \frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

定理5.6. 设Q是一个生灭过程转强阵，$\lambda_0>0$。

(1) 若$R=\infty$（即是说$m^+=0$，亦即Q是有法的），则恰有唯一一个Q—过程，它就是定理4.3中所构造出来的$\bar{P}(t)$，$\bar{P}(t)$满足(B)和(F)；

(2) 若$R<\infty$（即是说$m^+=1$，亦即Q是无法的），则全体Q—过程为定理4.12中所确定的$\mathscr{D}_1$（**注意**：这时$\mathscr{D}_1$中出现的$\bar{y}(\lambda)$已经在定理5.5中算出来了）。此外，$\mathscr{D}_1$中的Q—过程按它是否具有(B_λ)，(F_λ)和不间断性来分类的话，还有下面的表：

	$R<\infty$ $W=\infty$	$R<\infty$ $W<\infty$
不间断、(B_λ)、(F_λ)的个数	0	1
间断、(B_λ)、(F_λ)的个数	1	∞
不间断、(B_λ)、$(\overline{F}_\lambda)$的个数	∞	∞
间断、(B_λ)、$(\overline{F}_\lambda)$的个数	∞	∞
其它类型的个数	0	0

附注：$(\overline{F_\lambda})$ 代表不满足(F_λ)。例如："间断、(B_λ)、$(\overline{F_\lambda})$"代表间断的满足(B_λ)和不满足(F_λ)的Q—过程。

证 为证此定理，只须注意下列几点：

(1) 由命题4.7，此时任一Q—过程都满足(B_λ)。

(2) 当$R<\infty$（即$m^+=1$）时，由命题4.12知：满足(B_λ)的不间断的Q—过程有无穷多个；满足(B_λ)的间断的Q—过程也有无穷多个。

(3) 当$R<\infty$，$W=\infty$（即$m^+=1$，$l^+=0$，亦即Q无法且$l^+=0$）时，由定理4.11，满足(F_λ)的Q—过程唯一，而且它是间断的。

(4) 当$R<\infty$，$W<\infty$（即$m^+=1$，$l^+=1$）时，由定理4.11，

满足(F_λ)的Q—过程有无穷多个，恰有一个是不间断的。

下面我们来计算生灭过程转强阵Q所对应的

$$\overline{\Pi}=\lim_{t\to\infty}\overline{P}(t).$$

首先我们证明一个引理。

引理5.2. 设Q是任意一个无法的转强阵，(不一定要求Q是生灭过程转强阵，)则

$$\overline{\Pi}\mathbf{1}\neq\mathbf{1}.$$

证 如命题4.1，造转概阵

$$\widetilde{P}(t)=\begin{array}{c}\\ \Delta\\ E\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Delta\quad & \quad E\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ d(t) & \overline{P}(t)\end{pmatrix}\end{array},\quad d(t)=\mathbf{1}-\overline{P}(t)\mathbf{1},$$

则有

$$\widetilde{\Pi}=\lim_{t\to\infty}\widetilde{P}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ d(\infty) & \overline{\Pi}\end{pmatrix},$$

其中 $d(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}d(t)$。由命题4.1的附注得知$d(t)$ 对t来说单调非降，又因为Q 是无法的，所以$\overline{P}(t)\mathbf{1}\neq\mathbf{1}$，亦即$d(t)\neq 0$，更有$d(\infty)\neq 0$。但是$\widetilde{\Pi}\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$，$\overline{\Pi}\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$，所以$\overline{\Pi}\mathbf{1}\neq\mathbf{1}$。

定理5.7. 设Q是一个生灭过程转强阵，$\lambda_0>0$。

(1) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty$，则$\overline{\Pi}=0$；

(2) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty$，则

$$\overline{\Pi}=\mathbf{1}\pi',\quad \pi'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\right)^{-1}(\rho_0,\rho_1,\rho_2,\cdots);$$

(3) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}<\infty$，则$\overline{\Pi}=0$。

证 (1) 因为$\overline{\Pi}Q=0$，而由定理5.4系1得知 $\alpha'Q=0$ 的通解为

$$\alpha'=\alpha_0(1,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots)，（注意\rho_0=1），但是，而今$$

$\overline{\Pi}1\leqslant 1$，$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty$，所以$\overline{\Pi}=0$。

(2) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty$，

所以

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}\sum_{k=0}^{n}\rho_k=\infty,$$

亦即Q是有法的。又因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty,$$

所以，由定理5.4的系1得知

$$\ll\alpha'Q=0,\ \alpha'\geqslant 0,\ \alpha'\in(l)\gg$$

有非零解。而今Q又是不可约的，所以，由定理4.20得知：必有

$$\overline{\Pi}=1\pi',\ \pi'=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n}(\rho_0,\ \rho_1,\ \cdots).$$

(3) 若

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}<\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty,$$

则

$$R\leqslant\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\Big)<\infty,$$

因此Q是无法的。所以由引理5.2得知

$$\overline{\Pi}1\neq 1.$$

但是，而今Q是不可约的，所以由定理4.19得知：$\overline{\Pi}$只有两种可能，或则$\overline{\Pi}=0$，或则$\overline{\Pi}=1\pi'$，$\pi'1=1$。可是，我们已经证明$\overline{\Pi}1\neq 1$，所以$\overline{\Pi}=0$。

定理5.8. 设Q是一个生灭过程转强阵，而且$\lambda_0=0$。令

$$\gamma=1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots,$$

$$y_n^0=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}+\frac{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}}+\cdots\right),\quad (n\geqslant).$$

(1) 若$\gamma=\infty$，则

$$\overline{\Pi}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix};$$

(2) 若$\gamma<\infty$，则

$$\overline{\Pi}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ y_1^0 & 0 & 0 & \cdots\\ y_2^0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix}.$$

证 令

$$\overline{\Pi}=(\bar{\pi}_{ij},\ i,j\geqslant 0),$$

则由

$$\overline{\Pi}Q=0$$

得

$$\bar{\pi}_{i,1}\mu_1=0,\qquad (i\geqslant 0),$$

$$-\bar{\pi}_{i,1}(\lambda_1+\mu_1)+\bar{\pi}_{i,2}\mu_2=0,\quad (i\geqslant 0),$$

$$\bar{\pi}_{i,n-1}\lambda_{n-1}-\bar{\pi}_{i,n}(\lambda_n+\mu_n)+\bar{\pi}_{i,n+1}\mu_{n+1}=0,\quad (n\geqslant 2),\ (i\geqslant 0),$$

$$\cdots\cdots$$

由 $\lambda_i>0$，$\mu_i>0$，($i\geqslant 1$) 得知

$$\bar{\pi}_{i,j}=0,\ (i\geqslant 0,\ j\geqslant 1).$$

又因为$q_{0,0}=-\lambda_0=0$，所以，由§4准转概阵性质(*III*)得知，对

任何Q—过程$P(t)=(p_{i,j}(t),\ t,\ j\geqslant 0)$来说，恒有

$$p_{0,0}(t)\equiv 1.$$

更有 $\bar{\pi}_{0,0}=1$.

总上所述，我们得知$\overline{\Pi}$必为下述形状：

$$\overline{\Pi}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

下面我们就来算a_n，$(n\geqslant 1)$。

由定理4.18得知

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{是} \ll Q\begin{pmatrix} 1 \\ \\ y \end{pmatrix}=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的最小解所对应的y。上述方程式即：

$$\mu_1-(\lambda_1+\mu_1)y_1+\lambda_1 y_2=0,$$

$$\mu_n y_{n-1}-(\lambda_n+\mu_n)y_n+\lambda_n y_{n+1}=0,\ (n\geqslant 2),$$

$$0\leqslant y_n\leqslant 1,\ (n\geqslant 1).$$

解上述方程组得：

$$y_{n+1}=-\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots+\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}\right)+$$

$$+\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots+\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}+1\right)y_1,\ (n\geqslant 1).$$

欲$0\leqslant y_n\leqslant 1$，$(n\geqslant 1)$，必须而且只须：

$$\frac{\gamma_n-1}{\gamma_n}\leqslant y_1\leqslant 1,\ (n\geqslant 1),$$

其中

$$\gamma_n=\left(1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}\right).$$

所以

（1）当 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$ 时，

$$\ll Q\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的最小解为1，故$a=1$。

（2）当$\gamma<\infty$时，

$$\ll Q\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\gg$$

的最小解为：

$$\begin{pmatrix}1\\ y_1^0\\ y_2^0\\ \vdots\end{pmatrix},$$

其中

$$y_n^0=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}+\frac{\mu_1\cdots\mu_{n+1}}{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}}+\cdots\right),\ (n\geqslant 1).$$

故

$$a=\begin{pmatrix}y_1^0\\ y_2^0\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

下面我们要研究生过程转强阵。

定义5.2. 称下述形状的矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}(\lambda_i>0,\ i\geqslant 0)$$

为生过程转强阵。

定理5.9. 对生过程转强阵Q来说，$m^+=1$或者 $m^+=0$，而且$m^+=0$即是Q是有法的充要条件是：

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$$

证 解≪$(\lambda I-Q)y=0$，$0\leqslant y\leqslant \mathbf{1}$≫．因为

$$(\lambda I-Q)y=0$$

即是

$$(\lambda+\lambda_n)y_n-\lambda_n y_{n+1}=0,\quad (n\geqslant 0).$$

所以

$$y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)y_n=\cdots=\left(\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)\right)y_0,\quad (n\geqslant 0).$$

因此，≪$(\lambda I-Q)y=0$，$0\leqslant y\leqslant \mathbf{1}$≫仅有零解的充要条件是：

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

发散，或等价地说$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}$发散．又因为$Q$是保守的，所以，由定理4.6及4.4得知：$Q$是有法的充要条件是≪$(\lambda I-Q)y=0$，$0\leqslant y\leqslant \mathbf{1}$≫仅有零解．而且从上面我们还看出$m^+$只能为1或者0．至此，定理5.9得证．

定理5.10．对生过程转强阵Q来说，l^+恒等于0．

证 因为

$$\alpha'(\lambda I-Q)=0$$

即是

$$\begin{aligned}\alpha_0(\lambda+\lambda_0)&=0,\\-\alpha_0\lambda_0+\alpha_1(\lambda+\lambda_1)&=0,\\&\cdots\cdots\\-\alpha_n\lambda_n+\alpha_{n+1}(\lambda+\lambda_{n+1})&=0\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

所以 $\alpha'=(0,\ 0,\ \cdots)$．更有：

≪$\alpha'(\lambda I-Q)=0$，$\alpha'\geqslant 0$，$\alpha'\in(l)$≫

只有零解，亦即$l^+=0$。

定理5.11. 若Q是无法的生过程转强阵，则$\bar{y}(\lambda)$可算出如下：

$$\bar{y}(\lambda)=\begin{pmatrix} y_0(\lambda) \\ y_1(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$y_k(\lambda)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_{n+k}}\prod_{i=k}^{n+k-1}\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i}.$$

证 如定理4.3，$\bar{y}(\lambda)=1-\lambda\bar{R}(\lambda)1$，

$$\bar{R}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(\lambda),$$

$$R_n(\lambda)=\Pi^n(\lambda)(\lambda I+D_q)^{-1},$$

$$\Pi(\lambda)=(\lambda I+D_q)^{-1}S.$$

所以

$$\Pi(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+\lambda_0} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\lambda+\lambda_1} & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda+\lambda_0} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$\Pi^n(\lambda)=\begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{n列} & \frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{(\lambda-\lambda_0)\cdots(\lambda+\lambda_{n-1})} & 0 & \cdots \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{(\lambda+\lambda_1)\cdots(\lambda+\lambda_n)} & \cdots \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

因此，

$$R_n(\lambda)=\Pi^n(\lambda)(\lambda I+D_q)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{(\lambda+\lambda_0)\cdots(\lambda+\lambda_n)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dfrac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{(\lambda+\lambda_1)\cdots(\lambda+\lambda_{n+1})} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

故$\bar{\Psi}(\lambda)$是如定理5.11所指出的。

定理5.12。设Q是生过程转强阵.

(1) 若$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_i}=\infty$，即是$Q$是有法的，则其$Q$—过程是唯一的，它就是$\bar{R}(\lambda)$。

(2) 若$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_i}<\infty$，即是 $m^+=1$，则其全部Q—过程为定理4.12中所确定的$\mathscr{D}_1$。且这时$\mathscr{D}=\mathscr{D}_1$($\mathscr{D}$之定义亦见定理4.12)。

证。而今Q是生过程转强阵，所以$l^+=0$，亦即$\mathscr{L}_1$只有零解，所以由Γ及Γ_1之定义得$\mathscr{D}=\mathscr{D}_1$。

如果我们仿照生灭过程作表的话，我们有下表：

	$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_i}=\infty$,	$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_i}<\infty$
不间断、(B_λ)、(F_λ)的个数	1	0
间断、(B_λ)、(F_λ)的个数	0	1
不间断、(B_λ)、$(\overline{F}_\lambda)$的个数	0	∞
间断、(B_λ)、$(\overline{F}_\lambda)$的个数	0	∞
其它类型的个数	0	0

§6. 分枝过程

考虑一个反应堆。假定在开始时有N个质点，由于它们相互碰撞及外来质点流的袭击，这些质点可能分裂。我们近似地假定其分裂服从下述规律：

(1) 各质点的分裂情况是相互独立的；

(2) 各质点的分裂情况与该质点的历史无关。

如果我们令X_t为时刻t该反应堆中的质点数，易证$P(X_{s+t}=j|X_s=i)=p_{i,j}(t)$ 不依赖$s\geqslant 0$，此外，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,\ j\geqslant 0)$还满足下列方程组：

$$\begin{cases} p_{i,j}(t)=\sum\limits_{\sum\limits_{s=1}^{i} j_s=j} \prod\limits_{s=1}^{i} p_{1,j_s}(t), \quad (t\geqslant 0,\ i>0,\ j\geqslant 0), \\ p_{0,j}(t)=\delta_{0,j}. \end{cases} \tag{6.1}$$

定义6.1. 满足(6.1)的(准)转概阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),i,\ j\geqslant 0)$称之为分枝(准)转概阵。

命题6.1. 对分枝准转概阵$P(t)$来说，$Q=(q_{i,j})=P'(0)$ 满足：

$$q_{i,j}=\begin{cases} 0, & j<i-1 \\ i\ q_{1,j-i+1}, & j\geqslant i-1. \end{cases} \tag{6.2}$$

证 若注意 (6.1) 及

$$\lim_{t\to 0^+} p_{i,j}(t)=\delta_{i,j}$$

即可得：

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1-(p_{1,1}(t))^i}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+} i\,\frac{1-p_{1,1}(t)}{t}=-iq_{1,1},$$

$i\neq j$时，

$$\lim_{t\to0+}\frac{p_{i,j}(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}\left(\sum_{\sum_{s=1}^{i}j_s=j}\prod_{s=1}^{i}p_{1,j_s}(t)\right)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1}{t}(ip_{1,1}(t)^{i-1}p_{1,j-i+1}(t)), & j\geqslant i-1,\\ 0, & j<i-1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}i\ q_{1,j-i+1}, & j\geqslant i-1,\\ 0, & j<i-1.\end{cases}$$

定义6.2. 设$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\geqslant0)$是一个转强阵，如果它满足(6.2)，则称$Q$是一个分枝转强阵。

由命题6.1看出：对任何分枝准转概阵来说，如果$p'_{i,i}(0)>-\infty$，$(i\in E)$，则其转强阵是分枝转强阵。

在这一节中，我们首先研究分枝转强阵Q的Q—过程问题。

定理6.1. 对任何分枝转强阵Q来说，恒有$l^+=0$。(l^+的定义见命题4.4.)

证 考虑$\alpha'(\lambda I-Q)=0$，即是，

$$(\alpha_0,\alpha_1,\alpha,\alpha_2,\cdots)\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots\\ -q_{1,0} & \lambda-q_{1,1} & -q_{1,2} & \cdots\\ 0 & -2q_{1,0} & \lambda-2q_{1,1} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}=0,$$

(6.3)

(1) 若$q_{1,0}=0$，则(6.3)显然只有零解，所以$l^+=0$。

(2) 设$q_{1,0}>0$，令$q_1=-q_{1,1}$.由于$\mathscr{L}_\lambda$(定义见命题4.4)的维数不依赖于$\lambda>0$，所以下面对$\lambda=2q_{1,0}>0$来解(6.3).若(6.3)有非负非零解$\alpha'=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots)$，则

$$\alpha_{k+1}=\frac{1}{(k+1)q_{1,0}}[kq_1\alpha_k-(k-1)q_{1,2}\alpha_{k-1}-(k-2)q_{1,3}\alpha_{k-2}$$
$$-\cdots-q_{1,k}\alpha_1+\lambda\alpha_k]$$

$$a_k = \frac{1}{kq_{1,0}}[(k-1)q_1 a_{k-1} - (k-2)q_{1,2}a_{k-2} - \cdots$$

$$-q_{1,k-1}a_1 + \lambda a_{k-1}]$$

………………………

$$a_2 = \frac{1}{2q_{1,0}}[q_1 a_1 + \lambda a_1]$$

因此,

$$\sum_{j=2}^{k+1} a_j = \left(\frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j+1}\right) + \frac{1}{q_{1,0}}\Big[\frac{k}{k+1}\ q_1 a_k$$

$$+ (k-1)\left(\frac{q_1}{k} - \frac{q_{1,2}}{k+1}\right)a_{k-1}$$

$$+ (k-2)\left(\frac{q_1}{k-1} - \frac{q_{1,2}}{k} - \frac{q_{1,3}}{k+1}\right)a_{k-2}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{q_1}{2} - \frac{q_{1,2}}{3} - \cdots - \frac{q_{1,k}}{k+1}\right)a_1\Big]$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j+1}\right) + \frac{1}{q_{1,0}}\Big[\frac{k}{k+1} q_1 a_k$$

$$+ (k-1)\frac{q_1 - q_{1,2}}{k} a_{k-1}$$

$$+ (k-2)\frac{q_1 - q_{1,2} - q_{1,3}}{k-1} a_{k-2}$$

$$+ \cdots + \frac{q_1 - q_{1,2} - \cdots - q_{1,k}}{2} a_1\Big]$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j+1}\right) + \frac{1}{q_{1,0}}\Big[\frac{k}{k+1} q_{1,0} a_k$$

$$+ \frac{k-1}{k}\ q_{1,0} a_{k-1} + \cdots + \frac{1}{2}\ q_{1,0} a_1\Big]$$

$$= 2\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{j a_j}{j+1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^{k} a_j. \qquad (6.4)$$

在(6.4)中对$k\to\infty$取极限得：

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \tag{6.5}$$

而 $\alpha'=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots)\geqslant 0$, $\alpha'\neq 0$，所以(6.5)只能当 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j=\infty$才能成立。这就说明：

$$\ll \alpha'(\lambda I-Q)=0,\ 0\leqslant \alpha'\in(l)\gg$$

只有零解，亦即 $l^+=0$。

下面我们研究空间$\mathscr{M}_\lambda$的结构。$\mathscr{M}_\lambda$的结构比$\mathscr{L}_\lambda$复杂。

定理6.2. 设 $Q=(q_{i,j},\ i,\ j\geqslant 0)$是一个分枝转强阵，令

$$f(s)=\sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j}s^j, \quad (|s|\leqslant 1)$$

为其母函数。

(1) 若$f(s)$是M次多项式，则总有$m^+=0$，(m^+的定义见命题4.4)；

(2) 若Q保守，则$m^+=0$的充要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，积分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1}{f(x)}dx$$

发散；

(3) 若Q非保守，则$m^+=0$。

证 (2)、(3) 请参见[20]引理12.7.3和引理12.7.4。

现在证明(1)。不妨设$q_1=-q_{1,1}>0$（否则，对一切$i,j\geqslant 0$，都有 $q_{i,j}=0$，从而

$$(\lambda I-Q)y=0,\ (\lambda>0)$$

即为$\lambda y=0$，($\lambda>0$)，故$m^+=0$)。

考虑方程式：

$$(\lambda I-Q)y=0,$$

即是

$$
\begin{aligned}
&\lambda y_0 &&= 0,\\
&-q_{1,0}y_0+(\lambda+q_1)y_1-q_{1,2}y_2-q_{1,3}y_3-\cdots &&= 0,\\
&\qquad -2q_{1,0}y_1+(\lambda+2q_1)y_2-2q_{1,2}y_3-\cdots &&= 0,\\
&\qquad\qquad -3q_{1,0}y_2+(\lambda+3q_1)y_3-\cdots &&= 0,\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&.
\end{aligned}
$$

设 $y=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\end{pmatrix}$是上述方程组一个非负非零解。必有$y_0=0$。令$y_1, y_2$，…中第一个大于0者为$y_{K_1}$。考虑上述方程中第$K_1+1$式，发现必有$n$满足

$$M+K_1\geqslant n>K_1,$$

使得

$$y_n\geqslant\frac{\lambda+K_1q_1}{K_1q_1}y_{K_1}. \tag{6.6}$$

谬设对一切$M+K_1\geqslant n>K_1$，均有

$$y_n<\frac{\lambda+K_1q_1}{K_1q_1}y_{K_1}. \tag{6.7}$$

若注意$f(s)$是M次多项式，则发现第(K_1+1)式即是

$$(\lambda+K_1q_1)y_{K_1}-K_1q_{1,2}y_{K_1+1}-\cdots-K_1q_{1,M}y_{K_1+M-1}=0.$$

由(6.7)及$y_{K_1}>0$（从而必有某一个$q_{1,K}>0$，$(K>1)$）得：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+K_1q_1)y_{K_1}-K_1q_{1,2}y_{K_1+1}-\cdots-K_1q_{1,M}y_{K_1+M-1}\\
&>(\lambda+K_1q_1)y_{K_1}\left[1-\frac{K_1q_{1,2}}{K_1q_1}-\cdots-\frac{K_1q_{1,M}}{K_1q_1}\right]\\
&\geqslant(\lambda+K_1q_1)y_{K_1}q_{1,0}q_1^{-1}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

此为不可能，所以(6.6)成立。

令

$$K_2=\min\left\{n\,\middle|\,y_n\geqslant\frac{\lambda+K_1q_1}{K_1q_1},\ M+K_1\geqslant n>K_1,\right\}. \tag{6.8}$$

再考察方程组中第K_2+1个方程式，仿上，发现必有n满足

$$M+K_2 \geqslant n > K_2,$$

使得：

$$y_n \geqslant \frac{\lambda + K_2 q_1}{K_2 q_1} y_{K_2}.$$

令

$$K_3 = \min\left\{n \mid y_n \geqslant \frac{\lambda + K_2 q_1}{K_2 q_1} y_{K_2},\ M+K_2 \geqslant n > K_2,\right\}.$$

如此继续下去，我们得到一串严格上升的正整数$\{K_m,\ m\geqslant 1\}$，使得：

$$0 < K_m - K_{m-1} \leqslant M,\ (m\geqslant 2),$$

而且

$$y_{K_{m+1}} \geqslant \left(\frac{\lambda + K_m q_1}{K_m q_1}\right)\cdots\left(\frac{\lambda + K_1 q_1}{K_1 q_1}\right) y_{K_1}$$

$$= y_{K_1} \prod_{j=1}^{m} (1+\rho_j),$$

其中 $\rho_j = \dfrac{\lambda}{K_j q_1}$.

如果能证明 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \rho_m = \infty$，则$\{y_k,\ k\geqslant 1\}$无界，从而$m^+=0$。事实上，由于

$$K_1 < K_m \leqslant K_1 + mM,\ (m>1),$$

所以

$$\sum_{m=1}^{n} \rho_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda}{q_1}\left(\frac{1}{K_m}\right) \geqslant \sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda}{q_1} \frac{1}{K_1 + mM},$$

而今K_1，M, λ, q_1均为常数，故 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \rho_m = \infty$。定理得证。

现在我们问：任给一个分枝转强阵Q，分枝 Q——过程是否存在，(即是满足(6.1) 的Q—过程)？如存在，是否唯一？

定理6.3. 任给一个分枝转强阵$Q=(q_{i,j},\ i,\ j\geqslant 0)$，令$f(s)=\sum_{j=0}^{\infty}q_{1,j}s^j$为其母函数，则

(1) 任何一个分枝Q—过程$P(t)=(p_{i,j}(t),i,j\geqslant 0)$的母函数$F(t,\ x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1,j}(t)x^j$，$(|x|\leqslant 1)$必满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(t,\ x)}{\partial t}=f(F(t,\ x)),\\ F(0,x)=x,\end{cases}\quad(|x|\leqslant 1,\ t\geqslant 0),\quad(6.9)$$

(从而最多只有一个分枝Q——过程)；

(2) (6.9) 的解$F(t,\ x)$是分枝Q——过程的母函数的充要条件是：

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,\ x)\right)_{x=0}\geqslant 0,\ F(t,\ 1)\leqslant 1,\ (t\geqslant 0,\ k\geqslant 0);\quad(6.10)$$

(3) 对任一分枝转强阵Q，恒存在唯一一个分枝Q—过程，它就是定理4.3中的最小Q—过程。

证 (3)即是[20]引理12.7.1。

下面只证明(1)和(2)。在证明(1)、(2)之前我们先证明几个引理。

引理6.1. $F(t,\ x)$ 决定唯一一个分枝准转概阵$P(t)=(p_{i,j}(t))$ 使它满足

$$F(t,\ x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1,j}(t)x^j\qquad(t\geqslant 0,\ |x|\leqslant 1)$$

的充要条件是：

(i) $F(t,\ x)$在$t\geqslant 0,|x|\leqslant 1$上定义而且是$(t,\ x)$的二元连续函数，此外，固定$t\geqslant 0$，$F(t,\cdot)$还在$|x|<1$内解析；

(ii) $F(0,\ x)\equiv x$，$F(t,\ 1)\leqslant 1$，$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,\ x)\right)_{x=0}\geqslant 0$，

$(t\geqslant 0,\ k\geqslant 0)$;

(iii) $F(s+t,\ x)=F(t,\ F(s,\ x))$, $(s\geqslant 0, t\geqslant 0, |x|\leqslant 1)$;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,\ x)\right)_{x=0}=k!\delta_{1,k}$, $(k\geqslant 0)$.

证 必要性. 设 $P(t)=(p_{i,j}(t))$ 是一个分枝准转概阵, $F(t,\ x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_{1,j}(t)x^j$, $(|x|\leqslant 1,\ t\geqslant 0)$. 则显然$F(t,\ x)$满足(i), (ii), (iv)下面证明(iii).

$$
\begin{aligned}
F(s+t,\ x)&=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1,j}(s+t)x^j\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{1,k}(t)p_{k,j}(s)x^j\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{1,k}(t)\sum_{\sum\limits_{l=1}^{k}j_l=j}\prod_{l=1}^{k}p_{1,j_l}(s)x^{j_l}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}p_{1,k}(t)F(s,\ x)^k\\
&=F(t,\ F(s,\ x)).
\end{aligned}
$$

充分性. 令

$$F^i(t,\ x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}(t)x^j,\ (t\geqslant 0,\ |x|\leqslant 1).$$

往证 $P(t)=(p_{i,j}(t))$ 是一个分枝准转概阵. 事实上, 由(ii) 得 $P(t)\geqslant 0$, $P(t)1\leqslant 1$. 由(iii)得

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}(s+t)x^j&=F^i(s+t,\ x)\\
&=(F(s,\ F(t,\ x)))^i
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) F^j(t, x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(t) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) p_{j,k}(t) \Big) x^k. \qquad (i \geqslant 0).$$

此即

$$P(s+t) = P(s)P(t).$$

由(iv)可得

$$\lim_{t \to 0^+} P(t) = I.$$

由$P(t)$的定义立即可以看出$P(t)$满足(6.1)。至此引理6.1证毕。

引理6.2. 设Q是一个分枝转强阵。$F(t, x)$ 决定唯一一个分枝Q—过程$P(t) = (p_{i,j}(t))$满足

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j, \ (t \geqslant 0, \ |x| \leqslant 1)$$

的充要条件是引理6.1中的(i)—(iii)和

$$\text{(iv)}^* \ \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{\substack{x=0 \\ t=0}} = k! \ q_{1,k}.$$

为了证明引理6.2，只需注意(iv)*蕴含了(iv)，则由引理6.1立即得到引理6.2。

引理6.3. 设Q是一个分枝转强阵，$P(t)$是一个分枝Q—过程，

$F(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j$, $\quad f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j} s^j$, 则当 $\Delta t \to 0^+$时有

$$F(t + \Delta t, x) = F(t, x) + f(F(t, x)) \Delta t + o(\Delta t).$$

证 由于$F(t, x)$在$|x| < 1$内解析，所以当$|x| < 1$时有

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{1,j}(t) j(j-1) \cdots (j-k+1) x^{j-k}.$$

若注意

$$\lim_{j\to\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k}=0,\quad (|x|<1)$$

及
$$\sum_{j=0}^{\infty}|p'_{1,j}(t)|\leqslant -2q_{1,1},\qquad (t\geqslant 0)$$

则可得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,\ x)\ =\sum_{j=k}^{\infty}p'_{1,j}(t)j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k}$$

在$t\geqslant 0$，$|x|<1$连续，所以

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\ \frac{\partial}{\partial t}F\ (t,\ x)=\frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}F\ (t,\ x).$$

因此，

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\ \frac{\partial}{\partial t}\ F(t,\ x)\right)_{\substack{t=0\\x=0}}=f^{(k)}(0),$$

此即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\ F(t,\ x)\right)_{t=0}=f(x).$$

所以，当$\Delta t\to 0^+$时有

$$\begin{aligned}F(t+\ \Delta t,\ x)&=F(\ \Delta t,\ F(t,\ x))\\&=F(t,\ x)+f(F(t,\ x))\ \Delta t+o(\ \Delta t).\end{aligned}$$

至此，引理6.3证毕。

现在，我们利用引理6.1—6.3来证明定理6.3.

证　由于$f(s)$在$|s|<1$内解析，所以方程式(6.9)恰有唯一一个解$F(t,\ x)$，而且$F(t,\ x)$在$|x|<1$内解析。因此，为了证明定理6.3，只须证明两点：(1) 任何一个满足引理6.2中的条件的函数都是(6.9)的解；(2) 如果(6.9)的解$F(t,\ x)$满足 (6.10)，则$F(t,\ x)$确定唯一一个分枝Q—过程$P(t)=(p_{i,j}(t))$，使：

$$F(t,\ x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1,j}(t)x^j.\qquad (t\geqslant 0,\ \ |x|\leqslant 1).$$

(1) 可以从引理6.3中直接得出。下面证明(2) 设$F(t,x)$是(6.9)的解，则$F(t, x)$显然满足引理6.1中的(i)，至于(iii)，若令

$$g_1(t)=F(s+t, x), \quad g_2(t)=F(t, F(s, x)),$$

则g_1，g_2均为

$$\begin{cases}\dfrac{dg(t)}{dt}=f(g(t)), & (t\geqslant 0),\\ g(0)=F(s, x),\end{cases}$$

的解，故$g_1(t)\equiv g_2(t)$，　$(t\geqslant 0)$，亦即(iii)成立。
又因为

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}F(t, x)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(F(t, x))$$

在t和x充分小的区域上连续，故

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t, x)\right)_{\substack{x=0\\t=0}}=\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(F(0, x))\right)_{x=0}$$

$$=\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x)\right)_{x=0}=k!\ q_{1,k},$$

$$(k=0, 1, \cdots).$$

此即(iv)*成立。最后由于$F(0,x)=x$及(6.10)知(ii)成立。由引理6.2得知(2)成立，故定理得证。

例6.1. 令$Q=(q_{ij}, i, j\geqslant 0)$是一个分枝转强阵，且令

$$q_{10}=a>0, q_{12}=b>0, q_{11}=-(a+b), q_{1j}=0, (j\geqslant 3).$$

$$f(s)=\sum_{j=0}^{\infty}q_{1j}s^j=a-(a+b)s+bs^2.$$

解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}=f(F(t, x)), & (|x|\leqslant 1, t\geqslant 0),\\ F(0, x), & (|x|\leqslant 1)\end{cases}$$

得：

$$F(t,\ x)=\begin{cases}1-\dfrac{1-x}{1-(1-x)at}, & (a=b),\\ \dfrac{a(1-x)+(bx-a)e^{(a-b)t}}{b(1-x)+(bx-a)e^{(a-b)t}}, & (a\neq b).\end{cases}$$

容易看出：$F(t,\ x)$确定了唯一一个分枝Q—过程$P(t)$满足

$$F(t,\ x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1j}(t)x^j,\ (|x|\leqslant 1,\ t\geqslant 0).$$

由定理6.2(1)，知$m^+=0$，又因为现在的Q是保守的，所以由定理4.5得知Q—过程是唯一的，它就是$P(t)$。

下面我们要研究不同的主题了。

定理6.4. 设Q是一个分枝转强阵，$f(x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}q_{1,j}x^j$为其母函数，$P(t)$是分枝$Q$—过程。

(1) 若$f(x)\equiv 0$，$(|x|\leqslant 1)$，则$P(t)\equiv I$，$(t\geqslant 0)$，更有$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=\Pi=I$；

(2) 若$f(x)\not\equiv 0$，$(|x|\leqslant 1)$，(从而$q_{1,1}<0$)

则

$$\Pi=\lim_{t\to\infty}P(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ \rho & 0 & 0 & \cdots\\ \rho^2 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

其中ρ是

$$f(x)=0$$

的最靠近0的那一个非负根，而且$f'(1)>0$时$\rho<1$，特别地，当$f(1)=0$时，$\rho=1$的充要条件是$f'(1)\leqslant 0$，其中

$$f'(1)=\sum_{j=1}^{\infty}q_{1,j}j.$$

证 (1) 令 $F(t, x)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t)x^j$, $(t\geqslant 0, |x|\leqslant 1)$ 为 $P(t)$的母函数，若$f(x)\equiv 0$, $(|x|\leqslant 1)$, 则由定理6.3得知

$$F(t, x)\equiv g(x) \qquad (|x|\leqslant 1)$$

不依赖$t\geqslant 0$, 但是$F(0, x)\equiv x$, 所以

$$P(t)=I.$$

(2) 设$P(t)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}(t\geqslant 0)$, $f(x)\not\equiv 0$, $(|x|\leqslant 1)$, 则$q_{1,1}<0$, 所以$p_{1,1}(t)\not\equiv 1$, $(t\geqslant 0)$。但是$p_{1,1}(0)=1$, 因此必存在$t_0>0$, 使$p_{1,1}(t_0)<1$。令$P^*=P(t_0)$, $\{X_n, n\geqslant 0\}$是以P^*为转移阵的可数状态的时齐的马尔可夫链。由$p_{1,1}(t_0)<1$得知：必有$p_{1,0}(t_0)>0$或者$p_{1,k_0}(t_0)>0$(对某一个$k_0>1$)。若$p_{1,0}(t_0)>0$, 则对$i\geqslant 1$有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m=i\}\,|\,X_0=i\right)$$

$$=1-P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m\neq i\}\,|\,X_0=i\right)$$

$$\leqslant 1-P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m=0\}\,|\,X_0=i\right)$$

$$\leqslant 1-p_{i,0}(t_0)=1-(p_{1,0}(t_0))^i<1.$$

若$p_{1,k_0}(t_0)>0$, $p_{1,0}(t_0)=0$, 则对$i\geqslant 1$也有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m=i\}\,|\,X_0=i\right)$$

$$\leqslant 1-P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m\geqslant k_0 i\}\,|\,X_0=i\right)$$

$$\leqslant 1-(p_{1,k_0}(t_0))^i<1.$$

所以，只要$p_{1,1}(t_0)<1$, 就有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m=i\}\mid X_0=i\right)<1, \qquad (i\geqslant 1).$$

因此，由第一篇定理4.2(1)得知：

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{*(n)}=0, \qquad (i\geqslant 0,\ j\geqslant 1),$$

其中 $\qquad P^{*n}=(p_{i,j}^{*(n)},\ i,\ j\geqslant 0)$.

但$P^{*n}=P(nt_0)$，所以，若令$\Pi=(\pi_{i,j},\ i,\ j\geqslant 0)$，则必有$\pi_{i,j}=0$，$(i\geqslant 0,\ j\geqslant 1)$.

若$P(t)\mathbf{1}\neq\mathbf{1}$，$(t\geqslant 0)$，$f(x)\neq 0$，$(|x|\leqslant 1)$. 基于命题4.1同样可证$\pi_{i,j}=0$，$\quad (i\geqslant 0,\ j\geqslant 1)$.

下面我们证明ρ是$f(x)=0$的最靠近0的一个非负根。

由于$f''(x)$在$[0,\ 1]$上非负，所以$f(x)$在$[0,1]$上是向下凸的函数，因此$f(x)=0$在$[0,1]$上不会多于两个根。令λ是$f(x)=0$的最靠近零的一个根。

(a) 若$\lambda=0$，即是$f(0)=0$，由

$$\begin{cases} p'_{1,0}(t)=\dfrac{d}{dt}F(t,0)=f(F(t,0))=f(p_{1,0}(t)),(t\geqslant 0),\\ p_{1,0}(0)=0 \end{cases} \tag{6.12}$$

得知$p_{1,0}(t)\equiv 0$，$(t\geqslant 0)$，更有

$$\pi_{i,0}=\lim_{t\to\infty}(p_{1,0}(t))^i=0=\lambda \quad (i\geqslant 1).$$

(b) 若$\lambda>0$，则$f(0)>0$，所以

$$f(x)>0, \qquad (0\leqslant x<\lambda).$$

显然，

$$p_{1,0}(s+t)\geqslant p_{1,0}(t)p_{0,0}(s)=p_{1,0}(t),\ (s\geqslant 0,\ t\geqslant 0),$$

此即$p_{1,0}(t)$在$[0,\ \infty)$上是t的单调上升函数。令

$$\rho=\lim_{t\to\infty}p_{1,0}(t)=\sup_{t\geqslant 0}p_{1,0}(t).$$

由定理3.6及(6.12)有

$$0=\lim_{t\to\infty}p'_{1,0}(t)=\lim_{t\to\infty}f(p_{1,0}(t))=f(\rho).$$

所以 $\rho\geqslant\lambda$。

谬设$\rho>\lambda$。则必存在$\lambda'\in(\lambda,\ \rho)$，使$f(\lambda')<0$。但是$p_{1,0}(t)$是$t$的连续函数，故必有$t'$使$p_{1,0}(t')=\lambda'$。故

$$p'_{1,0}(t')=f(p_{1,0}(t'))=f(\lambda')<0,$$

这与$p_{1,0}(t)$在$[0,\ \infty)$上单调上升矛盾，故$\rho=\lambda$。显然

$$\pi_{i,0}=\lim_{t\to\infty}p_{i,0}(t)=\lim_{t\to\infty}(p_{1,0}(t))^i=\rho^i,\quad(i\geqslant0).$$

最后我们证明：ρ与$f'(1)$的关系。

(a) 设$f'(1)>0$。由于 $f(1)\leqslant0$，所以必有 $0<\lambda'<1$，使$f(\lambda')<0$。而$f(0)=q_{1,0}\geqslant0$，$f(x)$在$[0,1]$上是连续函数，所以，必有$\lambda<1$，使$f(\lambda)=0$。故$\rho<1$。

(b) 设$f'(1)\leqslant0$，$f(1)=0$。则当$x\in(0,\ 1)$时有

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{\infty}jq_{1,j}x^{j-1}\leqslant f'(1)\leqslant0.$$

谬设$f(0)=q_{1,0}=0$，则

$$q_{1,1}+2q_{1,2}+\cdots=f'(1)\leqslant0,$$

而$f(1)=0$，即是

$$q_{1,1}+q_{1,2}+\cdots=0,$$

所以

$$q_{1,2}+2q_{1,3}+\cdots=0.$$

但是$q_{1,i}\geqslant0$，$(i\geqslant2)$，所以$q_{1,i}\equiv0$，$(i\geqslant2)$。因此由$f(1)=0$得$q_{1,1}=0$。这与$f(x)\not\equiv0$(从而$q_{1,1}<0$)这一假设矛盾。所以$f(0)>0$。再注意$f'(x)\leqslant0$，$(x\in[0,\ 1])$及$f(1)=0$得知$f(x)=0$在$[0,\ 1]$上以且仅以1为根。故$\rho=1$。至此，定理6.4证毕。

第三篇　非时齐的准转概阵的分析理论

§1.　连续性及可微性

定义1.1. 设E为一可数集(不妨令E为非负整数集)，$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$，定义在$E$上的依赖二参数$s$和$t(0\leqslant s\leqslant t<\infty)$的实值矩阵$P(s,t)=(p_{i,j}(s,t),\ i,j\in E)$ 称为一个非时齐的准转概阵，如果它满足

(1) $p_{i,j}(s,t)\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}p_{i,j}(s,t)\leqslant 1,$　　(1.1)

$(i,j\in E,\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty)$;

(2) $p_{i,j}(s,s+t+u)=\sum_{k\in E}p_{i,k}(s,s+t)p_{k,j}(s+t,s+t+u),$

(1.2)

$(i,j\in E,\ 0\leqslant s,t,u<\infty)$，　此式通常称为 (K－C) 方程式;

(3) $\lim_{h\to 0+}\sup_{s\in[0,b]}|p_{i,j}(s,s+h)-\delta_{i,j}|=0,\ p_{i,j}(t,t)=\delta_{i,j},$

(1.3)

$(i,j\in E,\ 0\leqslant t<\infty,\ 0\leqslant b<\infty)$,

其中

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

记 $\delta_{i,A}=\sum_{j\in A}\delta_{i,j}$,　$p_{i,A}(s,t)=\sum_{j\in A}p_{i,j}(s,t)$, $(i\in E,A\subset E)$.

容易证明：(3) 等价于下列条件中任一条：

(3)′ $\lim\limits_{h\to 0+}\sup\limits_{h\leqslant s\leqslant b}|p_{i,j}(s-h,s)-\delta_{i,j}|=0$,

$p_{i,j}(t,t)=\delta_{i,j}$,

$(0\leqslant t<\infty,\ 0\leqslant b<\infty,\ i,j\in E)$,

(3)″ $\lim\limits_{h\to 0+}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant b}(1-p_{i,i}(s,s+h))=0$,

$p_{i,j}(t,t)=\delta_{i,j}$,

$(0\leqslant t<\infty,\ 0\leqslant b<\infty,\ i,j\in E)$,

(3)‴ $\lim\limits_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b}} p_{i,j}(s,t)=p_{i,j}(u,u)=\delta_{i,j}$,

$(u\geqslant 0,\ b>0,\ i,j\in E)$。

称非时齐的准转概阵$P(s,t)$为非时齐的转概阵，如果$P(s,t)1\equiv 1$。科学地说，非时齐的（准）转概阵应称为不一定时齐的（准）转概阵，但习惯已称"非时齐"，故按习惯称"非时齐"。

定理1.1. 对任何非时齐的准转概阵，$P(s,t)=(p_{i,j}(s,t),\ i,j\in E)$，恒有

(1) $p_{i,i}(s,t)>0$，$(i\in E,\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty)$；

(2) $|p_{i,J}(u,t)-p_{i,J}(v,t)|\leqslant 1-p_{i,i}(u\wedge v,u\vee v)$，$(i\in E,\ J\subset E,\ 0\leqslant u,\ v\leqslant t)$，其中$u\wedge v=\min(u,v)$，$u\vee v=\max(u,v)$；

证 (1) 由$(K-C)$方程式知

$$p_{i,i}(s,t)\geqslant\prod_{k=1}^{n}p_{i,i}\left(s+\frac{k-1}{n}(t-s),\ s+\frac{k}{n}(t-s)\right),$$

再用(1.3)即得(1)。

(2) 不失普遍性，可令$u\leqslant v\leqslant t$，由$(K-C)$方程式有

$$\begin{aligned}p_{i,J}(u,t)-p_{i,J}(v,t)&\geqslant(p_{i,i}(u,v)-1)p_{i,J}(v,t)\\&\geqslant p_{i,i}(u,v)-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{i,J}(u,t)-p_{i,J}(v,t)&\leqslant\sum_{k\neq i}p_{i,k}(u,v)p_{k,J}(v,t)\\&\leqslant\sum_{k\neq i}p_{i,k}(u,v)\leqslant 1-p_{i,i}(u,v),\end{aligned}$$

由上述两个不等式即得(2)。

定理1.2. 对任何非时齐的准转概阵$P(s,t)$，均有：

(1) $p_{i,J}(s,t)$对s来说在$[0,t]$上连续，(在 0 点只是右连续，在t点只是左连续)，而且此种连续对$t\geq 0$和$J\subset E$是等度的；

(2) $p_{i,J}(s,t)$对t来说在$[s,\infty)$上右连续，而且此种续对$J\subset E$来说是等度的。

特别地，若$P(s,t)$还满足

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leq s\leq t\leq b}} \sup_{i\in E}(1-p_{i,i}(s,t))=0,\ (b>0), \qquad (1.3)^*$$

则 $p_{i,J}(s,t)$ 作为(s,t)的二元函数在 $\mathscr{D}^*=\{(u,v)\mid 0\leq u\leq v<\infty\}$上连续。

证 (1) 由定理1.1的(2)并注意(1.3)即得(1)。

(2) 利用$(K-C)$方程式可证：对任何 $h>0$ 有

$$|p_{i,J}(s,t+h)-p_{i,J}(s,t)|\leq\sum_{k\in E}p_{i,k}(s,t)$$

$$\cdot(1-p_{k,k}(t,t+h)),$$

所以，用(1.3)及控制收敛定理即得(2)。

特别地，若$(1.3)^*$成立，则必有：对任何$b>0$,

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leq s\leq t\leq b}} p_{i,j}(s,t)=p_{i,j}(u,u)=\delta_{i,j},$$

对 $i\in E$ 一致成立。又因为 $\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,u)\leq 1$, 所以若令 $\delta_{i,J}=\sum_{j\in J}\delta_{i,j}$, $i\in E$, $J\subset E$, 则有

$$\lim_{\substack{u-v\to 0\\ s\leq u<v\leq b}}(p_{i,J}(s,v)-p_{i,J}(s,u))$$

$$=\lim_{\substack{u-v\to 0\\ v\leq u<s\leq b}}\sum_{k\in E}p_{i,k}(s,u)(p_{k,J}(u,v)-\delta_{k,J})=0.$$

此即 $p_{i,J}(s,t)$ 作为t的函数在$(s,b]$上左连续，由$b>0$可任意知在(s,∞)上左连续。既然 $p_{i,J}(s,t)$ 在$\mathscr{D}^*$上作为s,t的一元函数皆连

续，而作为s的连续函数来说，对t还是等度的，故$p_{i,j}(s,t)$在$\mathscr{D}^*$上是(s,t)的二元连续函数。

系1. 对任何非时齐的准转概阵$P(s,t)$来说，$p_{i,j}(s,t)$在$\mathscr{D}^*$上是(s,t)的二维波勒尔可测函数。

下面我们研究非时齐的准转概阵$P(s,t)$（对s,t）的可微性。为此，我们需要作一些准备工作。

引理1.1. 若$0\leqslant\beta\leqslant1$，$0\leqslant\alpha_i\leqslant1$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$1-\beta\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)\leqslant(1-\beta)+\beta\prod_{i=1}^{n}\alpha_i. \tag{1.4}$$

证 对n作归纳法．$n=1$时，(1.4)显然成立，设$n=k$时(1.4)成立。则

$$1-\beta\sum_{i=1}^{k+1}(1-\alpha_i)\leqslant-\beta(1-\alpha_{k+1})+(1-\beta)+\beta\prod_{i=1}^{k}\alpha_i$$

$$=(1-\beta)+\beta\prod_{i=1}^{k+1}\alpha_i+\beta(1-\alpha_{k+1})\prod_{i=1}^{k}\alpha_i-\beta(1-\alpha_{k+1})$$

$$\leqslant(1-\beta)+\beta\prod_{i=1}^{k+1}\alpha_i.$$

引理1.2. 存在$\alpha_0\in(0,1)$使$\alpha\in[\alpha_0,1]$，$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$时有

$$(\alpha-8\varepsilon)/(1-8\varepsilon)\geqslant\alpha^{(1+18\varepsilon)}. \tag{1.5}$$

证 由 $\lim\limits_{\alpha\to1}\left[\log\frac{\alpha-8\varepsilon}{1-8\varepsilon}\Big/\log\alpha\right]=\frac{1}{1-8\varepsilon}$

得知：存在$\alpha_0\in(8\varepsilon,1)$，使$\alpha_0\leqslant\alpha<1$时有

$$\log\frac{\alpha-8\varepsilon}{1-8\varepsilon}\Big/\log\alpha\leqslant\frac{1}{1-8\varepsilon}+\varepsilon\leqslant1+18\varepsilon.$$

又因为$\log\alpha<0$，故$\log\frac{\alpha-8\varepsilon}{1-8\varepsilon}\geqslant\log\alpha^{(1+18\varepsilon)}$，此即$\alpha\in[\alpha_0,1)$时，(1.5)成立，而$\alpha=1$时(1.5)显然成立。引理证毕。

定义1.2. 设$[\alpha,\beta]$是任一区间，$\alpha=\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n=\beta$，则称$\mathscr{D}(\alpha,\beta)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是$[\alpha,\beta]$的一个分割，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})$称为$\mathscr{D}$的直径，用$l(\mathscr{D})$表之。若还有分割$\mathscr{D}'(\alpha,\beta)=\{\alpha_0',\alpha_1',\cdots,\alpha_m'\}$，令$\beta_0=\alpha_0=\alpha_0'=\alpha$，$\beta_k=\min\{\alpha_p,\alpha_q'\mid\alpha_p>\beta_{k-1},\alpha_q'>\beta_{k-1}\}$，若$\{\alpha_p,\alpha_q'\mid\alpha_p>\beta_{k-1},\alpha_q'>\beta_{k-1}\}$非空，反之定义$\beta_k=\beta_{k-1}$，$(k=1,2,\cdots,m+n+1)$。称新分割$\{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{m+n+1}\}$是$\mathscr{D}$与$\mathscr{D}'$之并，记之为$\mathscr{D}\cup\mathscr{D}'$。若集合$\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$含于$\{\alpha_0',\alpha_1',\cdots,\alpha_m'\}$之中，则称$\mathscr{D}'$是$\mathscr{D}$的"加细"，或称$\mathscr{D}$是$\mathscr{D}'$的子分割，记之为$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$。显然$\mathscr{D}\cup\mathscr{D}'$是$\mathscr{D}(\mathscr{D}')$之加细。

定义1.3. 设$f(s,t)$是定义在$a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上的非负实值函数，$f(t,t)\equiv0$，$(a\leqslant t\leqslant b)$，对任何$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，及$\mathscr{D}(\alpha,\beta)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，记$\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\alpha_{k-1},\alpha_k)$.称

$\sup\limits_{一切\mathscr{D}(\alpha,\beta)}\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))$为$f$在$[\alpha,\beta]$上的全叠积，用$V_f(\alpha,\beta)$记之，如无混淆，简记之为$V(\alpha,\beta)$。若$V_f(\alpha,\beta)<\infty$，则称$f$在$[\alpha,\beta]$上是有界叠积。若$\lim\limits_{l(\mathscr{D})\to0}\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))$存在，则称$f$在$[\alpha,\beta]$上的"微积"存在，记此极限为$I_f(\alpha,\beta)$。若对任何$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$，都有$\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))\leqslant\sigma_f(\mathscr{D}'(\alpha,\beta))$，则称$\sigma_f(\cdot)$在$D_\alpha^\beta=\{一切分割\mathscr{D}(\alpha,\beta)\}$上单调非降，仿之可定义单调非升。

引理1.3. 设$f(s,t)$是定义在$a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上的非负实值函数，$f(t,t)\equiv0$，若$I_f(a,b)$存在且有限，则

(1) $I_f(c,d)$存在且$\leqslant I_f(a,b)$，$(a\leqslant c\leqslant d\leqslant b)$；

(2) $I_f(c,c)=0$，$I_f(c,d)=I_f(c,\alpha)+I_f(\alpha,d)$，$(a\leqslant c\leqslant\alpha\leqslant d\leqslant b)$。

证 由$I_f(s,t)$之定义立即可得。

引理1.4. 对任何非时齐准转概阵$P(s,t)$，令

$$f(s,t)=-\log p_{ii}(s,t),\tag{1.6}$$

则

(1) $\sigma_f(\cdot)$在D_s^t上单调非降，$(0\leqslant s<t<\infty)$；

(2) $I_f(s,t)$存在且等于$V_f\ (s,t)$，$(0\leqslant s<t<\infty)$；

(3) $f(s,t)\leqslant I_f(s,t)$，$(0\leqslant s<t<\infty)$。　　　　(1.7)

证　(1) 由定理1.1知 $f(s,t)$ 是非负实值函数且$f(t,t)\equiv 0$，再用(K－C)方程式立得(1)。

(2) 显然

$$\limsup_{l(\mathscr{D})\to 0}\sigma_f(\mathscr{D}(s,t))\leqslant V_f(s,t).$$

谬设

$$\liminf_{l(\mathscr{D})\to 0}\sigma_f(\mathscr{D}(s,t))<V_f(s,t)=\sup_{一切\mathscr{D}}\sigma_f(\mathscr{D}(s,t)),$$

则必存在一个分割$\mathscr{D}_0$及一串分割$\{\mathscr{D}_n\}$，使

$$l(\mathscr{D}_n)\to 0,\ \lim_{n\to\infty}\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t))<\sigma_f(\mathscr{D}_0(s,t)). \tag{1.8}$$

令　$\mathscr{D}_n(s,t)=\{s_0^{(n)},s_1^{(n)},\cdots,s_{k(n)}^{(n)}\}$，$\mathscr{D}_0(s,t)=\{s_0,s_1,\cdots,s_{k(0)}\}$，$l^{(n)}(j)=\min\{i\,|\,s_i^{(n)}\geqslant s_j\}$，$j=1,2,\cdots k(0)-1$，则有

$$\begin{aligned}\sigma_f((\mathscr{D}_n\cup\mathscr{D}_0)(s,t))&=\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t))\\&+\sum_{j=1}^{k(0)-1}\left[f(s^{(n)}_{l^{(n)}(j)-1},s_j)+f(s_j,s^{(n)}_{l^{(n)}(j)})\right.\\&\left.-f(s^{(n)}_{l^{(n)}(j)-1},s^{(n)}_{l^{(n)}(j)})\right],\end{aligned}$$

由(1.3)有

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b}}f(s,t)=0.$$

若再注意 $\lim\limits_{n\to\infty}l(\mathscr{D}_n)=0$ 和

$$\max\{(s^{(n)}_{l^{(n)}(j)}-s_j),\ (s^{(n)}_{l^{(n)}(j)}-s^{(n)}_{l^{(n)}(j)-1}),\ (s_j-s^{(n)}_{l^{(n)}(j)-1})\}\leqslant l(\mathscr{D}_n),$$

可得

$$\liminf_{n\to\infty}\sigma_f((\mathscr{D}_n\cup\mathscr{D}_0)(s,t))$$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t)). \tag{1.9}$$

但是，由$f(s,t)$满足(1)可知

$$\sigma_f((\mathscr{D}_n \cup \mathscr{D}_0)(s,t)) \geqslant \sigma_f(\mathscr{D}_0(s,t)),\ (n\geqslant 1), \tag{1.10}$$

由（1.9）、（1.10）得 $\sigma_f(\mathscr{D}_0(s,t)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t))$。这与(1.8)矛盾。所以$\lim\limits_{l(\mathscr{D})\to 0} \sigma_f(\mathscr{D}(s,t)) = I_f(s,t)$存在且等于$V_f(s,t)$。

(3) 由(1)立得(3)。

引理1.5. 设$P(s,t)$是一个非时齐的准转概阵，任取$i\in E$，$A\subset E$，$i\bar{\in} A$，若

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leqslant s<t\leqslant b}} \sup_{j\in A}[1-p_{j,j}(s,t)]=0,\quad (b>0), \tag{1.11}$$

则对任何给定的 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，$b>0$，存在 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,i,A,b)>0$，使得 $0\leqslant t-s<\tau_0$，$0\leqslant s<t\leqslant b$时，对$[s,t]$的任何分割 $\mathscr{D}(s,t)=\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$ 有

$$p_{i,A}(s,t)\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} p_{i,A}(r_{j-1},r_j). \tag{1.12}$$

证 固定i，A，b。任给 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，由(1.11)得知：存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon)$使

$$\sup_{\substack{0\leqslant r-q\leqslant\tau_0\\ 0\leqslant r<q\leqslant b\\ j\in A}} (1-p_{j,j}(q,\ r))<\varepsilon. \tag{1.13}$$

令
$$G^{(0)}_{i,B}=\delta_{i,B},$$
$$G^{(1)}_{i,B}=p_{i,B}(r_0,\ r_1),$$
$$G^{(m+1)}_{i,B}=\sum_{k\bar{\in} A} G^{(m)}_{i,k}\, p_{k,B}(r_m,\ r_{m+1}),$$

其中$\delta_{i,B}=\sum\limits_{k\in B}\delta_{i,k}$，$G^{(m)}_{i,k}=G^{(m)}_{i,\{k\}}$，$i\in E,B\subset E,1\leqslant m<n$。($G^{(m)}_{i,B}$的概率意义是：系统在时刻$r_0=s$处于状态$i$，在时刻$r_1$，…，$r_{m-1}$不

进入A而在时刻r_m进入B的概率。）对m作归纳法可证：

$$p_{i,B}(s,\ t)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}p_{j,B}(r_l,\ t)$$

$$+\sum_{j\overline{\in}A}G_{i,j}^{(m)}p_{j,B}(r_m,\ t),\quad (1\leqslant m\leqslant n,\ B\subset E),\ (1.14)$$

事实上，$m=1$时，(1.14)显然成立。设（1.14）对$m-1$成立，则由$G_{i,B}^{(l)}$的定义及$(K-C)$方程式和富比尼定理有

$$p_{i,B}(s,\ t)=\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}p_{j,B}(r_l,\ t)$$

$$+\sum_{j\overline{\in}A}G_{i,j}^{(m-1)}p_{j,B}(r_{m-1},\ t)$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}p_{j,B}(r_l,\ t)+\sum_{j\overline{\in}A}G_{i,j}^{(m)}p_{j,B}(r_m,\ t)$$

$$+\sum_{j\overline{\in}A}G_{i,j}^{(m-1)}p_{j,B}(r_{m-1},\ t)-\sum_{j\in E}G_{i,j}^{(m)}p_{j,B}(r_m,\ t)$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}p_{j,B}(r_l,\ t)+\sum_{j\overline{\in}A}G_{i,j}^{(m)}p_{j,B}(r_m,\ t).$$

在(1.14)中取 $m=n$，$B=A$，并注意 $i\overline{\in}A$，$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，$0\leqslant s<t\leqslant b$及(1.13)可得

$$\varepsilon>p_{i,A}(s,\ t)\geqslant\sum_{l=1}^{n}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}p_{j,A}(r_l,\ t)$$

$$\geqslant\sum_{l=1}^{n}\sum_{j\in A}G_{i,j}^{(l)}(1-\varepsilon).$$

所以

$$\sum_{l=1}^{n}G_{i,A}^{(l)}\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.\qquad(1.15)$$

在(1.14)中取$B=\{i\}$即得

$$p_{i,i}(s,\ t) \leqslant \sum_{l=1}^{m} G_{i,A}^{(l)} + G_{i,i}^{(m)} + \sum_{j \bar{\in} A \cup \{i\}} G_{i,j}^{(m)} p_{j,i}(r_m,\ t) .$$

(1.16)

对m作归纳法易证：

$$G_{i,B}^{(m)} \leqslant p_{i,B}(r_0,\ r_m). \tag{1.17}$$

由(1.13)和(1.17)得

$$\sum_{j \bar{\in} A \cup \{i\}} G_{i,j}^{(m)} p_{j,i}(r_m,\ t) \leqslant \varepsilon. \tag{1.18}$$

以(1.15)、(1.18)代入(1.16)并注意(1.13)得

$$G_{i,i}^{(m)} \geqslant (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon > \frac{1-8\varepsilon}{1-\varepsilon},\ (0 \leqslant m \leqslant n).$$

(1.19)

由$G_{j,B}^{(m)}$的定义有

$$G_{i,c}^{(l)} \geqslant G_{i,i}^{(l-1)} p_{i,c}(r_{l-1},\ r_l),\ (l=1,\cdots,n). \tag{1.20}$$

在(1.14)中取$B=A$, $m=n$, 并注意(1.13)、(1.19)(1.20)得

$$p_{i,A}(s,\ t) \geqslant \sum_{l=1}^{n} G_{i,i}^{(l-1)} \sum_{j \in A} p_{i,j}(r_{l-1},\ r_l) p_{j,A}(r_l,\ t)$$

$$\geqslant \frac{1-8\varepsilon}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon) \sum_{l=1}^{n} \sum_{j \in A} p_{i,j}(r_{l-1},\ r_l)$$

$$= (1-8\varepsilon) \sum_{l=1}^{n} p_{i,A}(r_{l-1},\ r_l).$$

引理1.6. 若非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$满足

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+ \\ 0 \leqslant s < t \leqslant b}} \sup_{j \in E} (1 - p_{j,j}(s,\ t)) = 0,\ (b > 0), \tag{1.21}$$

任取$i \in E$, $A \subset E$, $i \bar{\in} A$, $b>0$, 则对任何$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$, 存在$\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, A, b) > 0$, 使得：只要$0 \leqslant t-s \leqslant \tau_0$, $0 \leqslant s < t \leqslant b$, 那么对$[s,\ t]$的任一分割$\mathscr{D}(s,\ t) = \{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_n\}$, 都有

$$p_{i,A}(s,\ t) \leqslant \sum_{l=1}^{n} p_{i,A}(r_{l-1},\ r_l)$$

$$+8\varepsilon \sum_{l=1}^{n} p_{i,E-(A\cup\{i\})}(r_{l-1},\ r_l). \tag{1.22}$$

证 由引理1.5知：存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,\ i,\ A,\ b)>0$，只要$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，$0\leqslant s<t\leqslant b$，有

$$p_{i,E-(A\cup\{i\})}(s,\ t) \geqslant (1-8\varepsilon) \sum_{l=1}^{n} p_{i,E-(A\cup\{i\})}(r_{l-1},\ r_l). \tag{1.23}$$

注意：对任何非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$，(1.14) 是恒等式。在(1.14)中取$B=A=E-\{i\}$，$m=n$，即得

$$\begin{aligned} p_{i,E-\{i\}}(s,\ t) &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{j\neq i} G_{i,j}^{(l)} p_{j,E-\{i\}}(r_l,\ t) \\ &\leqslant \sum_{l=1}^{n} G_{i,E-\{i\}}^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{n} G_{i,i}^{(l-1)} p_{i,E-\{i\}}(r_{l-1}, r_l) \\ &\leqslant \sum_{l=1}^{n} p_{i,E-\{i\}}(r_{l-1},\ r_l). \end{aligned} \tag{1.24}$$

(1.24)减去(1.23)即得(1.22)。

引理1.7. 设$0\leqslant p(s,t)\leqslant 1$，$(0\leqslant s\leqslant t<\infty)$，且$\lim\limits_{\substack{(t-s)\to 0+ \\ 0\leqslant s<t\leqslant b}} p(s,\ t)=1$，$(b>0)$，令$f(s,\ t)=-\log p(s,\ t)$，任取$u$固定，则

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u \\ (t-s)\to 0+}} f(s,t)\Big/(t-s) \text{与} \lim_{\substack{[s,t]\ni u \\ (t-s)\to 0+}} (1-p(s,\ t))\Big/(t-s)$$ 或者

都不存在，或者同时存在且相等。($\log 0$定义为$-\infty$)。

证 直接验证即知。

定理1.3. 设非时齐转概阵 $P(s, t)$ 满足 (1.3)*，固定任意 $i\in E$，令 $f(s, t)=-\log p_{i,i}(s, t)$，则

(1) $T(1-P)=T(f)=T(I_f)=T(V_f)$， (1.25)

其中

$$T(1-P)=\left\{u \mid u\geqslant 0, \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-p_{i,i}(s, t)}{t-s}\text{存在}\right\},$$

$$T(f)=\left\{u \mid u\geqslant 0, \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f(s, t)}{t-s}\text{存在}\right\},$$

而$T(I_f)$，$T(V_f)$的定义类似，I_f、V_f的定义见定义1.3. 此外，当 $u\in T(f)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-p_{i,i}(s, t)}{(t-s)}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f(s,t)}{(t-s)}$$

$$=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{V_f(s,t)}{(t-s)}$$

$$=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)}. \qquad (1.26)$$

(2) 存在勒贝格零测集$N(i)$，使$u\overline{\in}N(i)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_f(s,t)\Big/(t-s) \quad \text{存在且有限.}$$

(3) 当$u\overline{\in}N(i)$时，有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} (1-p_{i,i}(s, t))\Big/(t-s)=q_i(u) \qquad (1.27)$$

存在且有限。更有

$$\lim_{t\downarrow u}\frac{1-p_{i,i}(u,t)}{t-u}=q_i(u), \quad (u\overline{\in}N(i)), \qquad (1.28)$$

$$\lim_{s\uparrow u}\frac{1-p_{i,i}(s,u)}{u-s}=q_i(u), (u\overline{\in}N(i), u>0). \quad (1.29)$$

证 由引理1.4知$I_f(s, t)=V_f(s, t)$存在，且

$$f(s,t)\leqslant I_f(s,t)=V_f(s,t), \quad (0\leqslant s\leqslant t<\infty). \quad (1.30)$$

由P$(s,\ t)$满足(1.3)*及引理1.5知：对任何$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$存在 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,i,b)>0$，使得$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，$0\leqslant s<t\leqslant b$时有

$$p_{i,E-\{i\}}(s,t)\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{l=1}^{n}p_{i,E-\{i\}}(r_{l-1},r_l),\quad(1.31)$$

再用P$(s,\ t)\mathbf{1}=\mathbf{1}$可知

$$p_{i,i}(s,t)\leqslant 1-(1-8\varepsilon)\sum_{l=1}^{n}(1-p_{i,i}(r_{l-1},r_l)),\quad(1.32)$$

用引理1.1（取$\beta=(1-8\varepsilon)$，$a_l=p_{i,i}(r_{l-1},\ r_l)$）由(1.32)得

$$p_{i,i}(s,t)\leqslant 8\varepsilon+(1-8\varepsilon)\prod_{l=1}^{n}p_{i,i}(r_{l-1},r_l),\qquad(1.33)$$

若令

$$f_1(s,t)=-\log[(p_{i,i}(s,t)-8\varepsilon)/(1-8\varepsilon)],$$

由（1.33）有

$$f_1(s,t)\geqslant\sum_{l=1}^{n}f(r_{l-1},r_l),\qquad(1.34)$$

从而由$I_f(s,t)=V_f(s,t)$的存在性及$\{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_n\}$是$[s,t]$的一个分割得知

$$f_1(s,t)\geqslant I_f(s,t),\ (0\leqslant t-s\leqslant\tau_0,0\leqslant s<t\leqslant b).\quad(1.35)$$

由(1.30)、(1.35)得

$$f(s,t)\leqslant I_f(s,t)=V_f(s,t)\leqslant f_1(s,t),$$
$$(0\leqslant t-s\leqslant\tau_0,\ 0\leqslant s<t\leqslant b)\qquad(1.36)$$

所以，任取$u\in T(I_f)$，$0\leqslant u<b$，有

$$\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\left[f(s,t)\Big/(t-s)\right]\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\left[I_f(s,t)\Big/(t-s)\right]$$

$$=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\left[I_f(s,t)\Big/(t-s)\right]\leqslant\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\left[f_1(s,t)\Big/(t-s)\right].$$

$$(1.37)$$

但是，由引理1.2有

$$\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f_1(s,t)}{(t-s)} = \liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{-1}{(t-s)} \log \frac{p_{i,i}(s,t)-8\varepsilon}{1-8\varepsilon}$$

$$\leqslant \liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{(1+18\varepsilon)}{(t-s)}(-\log p_{i,i}(s,t))$$

$$= \liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} (1+18\varepsilon)\frac{f(s,t)}{(t-s)}. \quad (1.38)$$

由(1.37)、(1.38)和$\varepsilon>0$可任意小得知$u\in T(f)$，

（即是 $[0,b)\cap T(I_f)\subset T(f)$）且

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f(s,t)}{(t-s)}$$

$$= \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_f(s,t)\Big/(t-s). \quad (u\in T(I_f)\cap(0,b)) \quad (1.39)$$

但是$b>0$可以任意，所以$T(I_f)\subset T(f)$且(1.39)对一切$u\in T(I_f)$成立。仿之可证$T(f)\subset T(I_f)$。总之，$T(f)=T(I_f)=T(V_f)$，且$u\in T(f)$时(1.26)后面二等式成立。再用引理1.7即得(1.25)、(1.26)。(1)证毕。

(2) 由(1.36)知$I_f(s,t)$在$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，$0\leqslant s\leqslant t<b$上有限，由引理1.3知：任意固定$a$，$\psi(\nu)=I_f(a,\nu)$ $(a\leqslant\nu\leqslant a+\tau_0,\ \nu<b)$是单调非降实值函数，故对$(a,(a+\tau_0)\wedge b)$中几乎所有的$u$，有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)} = \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{\psi(t)-\psi(s)}{(t-s)}$$

存在且非负有限。由于a和b可以任意，$\tau_0>0$，故对$[0,\infty)$中几乎所有的u，

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)}$$

存在且非负有限。

(3) 由(1)、(2)得(1.27)。由(1.27)得(1.28)、(1.29)。定理证毕。

定理1.4. 设非时齐转概阵$P(s,t)$满足(1.3)*，固定任意 $i\in E$, $A\subset E$, $i\bar{\in}A$, 令

$$g(s,t)=p_{i,A}(s,t),\quad h(s,t)=p_{i;E-\{i\}}(s,t),\qquad (1.40)$$

则

(1) $I_g(a,b)$, $I_h(a,b)$存在且有限, $(0\leqslant a\leqslant b<\infty)$;

(2) $\overline{N(i)}\cap T(g)=\overline{N(i)}\cap T(I_g)$, 且$u\in\overline{N(i)}\cap T(g)$时,

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)\Big/(t-s)=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)\Big/(t-s);$$

(其中 $N(i)$、$T(g)$、$T(I_g)$见定理1.3, $\overline{N(i)}=[0,\infty)-N(i)$)．

(3) 存在勒贝格零测集$N(i,A)$,当$u\bar{\in}N(i,A)$时,

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)\Big/(t-s)=q_{i,A}(u)$$

存在且非负有限;

(4) 当$u\bar{\in}N(i,A)$时, 有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} p_{i,A}(s,t)\Big/(t-s)=q_{i,A}(u),\qquad (1.41)$$

更有,

$$\lim_{t\downarrow u}p_{i,A}(u,t)/(t-u)=q_{i,A}(u),\quad (u\bar{\in}N(i,A)),\qquad (1.42)$$

$$\lim_{s\uparrow u}p_{i,A}(s,u)/(u-s)=q_{i,A}(u),\quad \left(\begin{matrix}u>0,\\u\bar{\in}N(i,A)\end{matrix}\right).\qquad (1.43)$$

证 (1) 令$g_B(s,t)=p_{i,B}(s,t)$, $(B\subset E,\ i\bar{\in}B)$.

任给$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$, 由引理1.5得知：存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,\ i,B,b)>0$, 对$[a,b]$的任一分割$\mathscr{D}(a,b)=\{s_0,s_1,\cdots,s_n\}$, 只要$l(\mathscr{D})<\tau_0$, 那么对$[a,b]$的其它任意分割$\widetilde{\mathscr{D}}(a,b)=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\}$, 都有

$$\sigma_{g_B}(\mathscr{D}(a,b))\geqslant(1-8\varepsilon)\,\sigma_{g_B}((\mathscr{D}\cup\widetilde{\mathscr{D}})(a,b)).\qquad (1.44)$$

若令$l(j)=min\{i|t_i\geqslant s_j\}$，$(j=1,\cdots,n-1)$，则有

$$\sigma_{g_B}((\mathscr{D}\cup\widetilde{\mathscr{D}})(a,b))=\sigma_{g_B}(\widetilde{\mathscr{D}}(a,b))$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}[g_B(t_{l(j)-1},s_j)+g_B(s_j,t_{l(j)})-g_B(t_{l(j)-1},t_{l(j)})].$$

注意：$max\{(t_{l(j)}-s_j),(s_j-t_{l(j)-1}),(t_{l(j)}-t_{l(j)-1})\}\leqslant l(\widetilde{\mathscr{D}})$，所以，在(1.44)中令$l(\widetilde{\mathscr{D}})\to 0$由$\lim\limits_{(t-s)\to 0+}g_B(s,t)=0$得

$$\infty>\sigma_{g_B}(\mathscr{D}(a,b))\geqslant(1-8\varepsilon)\limsup_{l(\widetilde{\mathscr{D}})\to 0}\sigma_{g_B}(\widetilde{\mathscr{D}}(a,b)).$$

因此，在上式中令$l(\mathscr{D})\to 0$取下极限并注意$\varepsilon>0$可任意小即可知$I_{g_B}(a,b)$存在且有限。(1) 证毕。

(2) 由引理1.5及1.6知：对任何$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,i,A,b)>0$，使$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，$0\leqslant s\leqslant t<b$时有

$$\begin{cases}(1-8\varepsilon)I_h(s,t)\leqslant h(s,t),\\(1-8\varepsilon)I_g(s,t)\leqslant g(s,t)\leqslant I_g(s,t)+8\varepsilon I_h(s,t).\end{cases}\tag{1.45}$$

所以，若取$u\in\overline{N(i)}\cap T(I_g)\cap[0,b)$，则由

$$(1-8\varepsilon)\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}I_g(s,t)\Big/(t-s)$$

$$\leqslant\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}g(s,t)\Big/(t-s)$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}g(s,t)\Big/(t-s)$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}I_g(s,t)\Big/(t-s)+\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{8\varepsilon I_h(s,t)}{(t-s)}$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_g(s,t)}{(t-s)}+\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{8\varepsilon}{1-8\varepsilon}\cdot\frac{1-p_{i,i}(s,t)}{(t-s)},$$

及

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-p_{i,i}(s,t)}{t-s}=q_i(u)$$

是有限数和

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_g(s,t)}{(t-s)}=q_{i,A}(u)$$

存在，并注意$\varepsilon>0$可以任意小即得

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)\Big/(t-s)=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)\Big/(t-s)$$

$=q_{i,A}(u)$ 存在。由$b>0$可任意大知此式对$u\in\overline{N}(i)\cap T(I_g)$成立。仿之，任取$u\in\overline{N}(i)\cap T(g)$，也可证

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)\Big/(t-s)$$

存在且等于

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)\Big/(t-s).$$

至此，(2) 证毕。

(3) 由$I_g(s,t)$存在且有限，$(0\leqslant s\leqslant t<\infty)$，仿定理 1.3(2)可得本定理的(3)。

(4) 由(3)立得(4)。定理1.4证毕。

定理1.5. 设非时齐的准转概阵$P(s,t)$满足$(1.3)^*$，则对任何$i\in E$，$A\subset E$,存在一个勒贝格零测集$N(i,A)$。使$u\overline{\in}N(i,A)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{p_{i,A}(s,t)-\delta_{i,A}}{(t-s)}$$

$$=-\delta_{i,A}q_i(u)+q_{i,A-\{i\}}(u), \tag{1.46}$$

更有

$$\lim_{t\downarrow u}\frac{p_{i,A}(u,t)-\delta_{i,A}}{(t-u)}$$

$$= -\delta_{i,A}q_i(u) + q_{i,A-\{i\}}(u), \quad (u \bar{\in} N(i,A)), \quad (1.47)$$

$$\lim_{s\uparrow u}\frac{p_{i,A}(s,u)-\delta_{i,A}}{(u-s)}$$

$$= -\delta_{i,A}q_i(u) + q_{i,A-\{i\}}(u), \left(\begin{matrix} u>0, \\ u \bar{\in} N(i,A) \end{matrix}\right), \quad (1.48)$$

其中$q_i(u)$、$q_{i,A}(u)$是u的非负实值函数。

证 若 $P(s,t)$ 是转概阵，则由定理1.3、1.4立得（1.46）、（1.47）、（1.48）成立。若$P(s,t)$是准转概阵，任取$i^* \bar{\in} E$，令

$$p^*_{i,j}(s,t) = \begin{cases} p_{i,j}(s,t), & i, \ j \in E \\ 1 - \sum_{k \in E} p_{i,k}(s, \ t), & i \in E, \ j = i^* \\ \delta_{i^*,j}, & i = i^* \end{cases}$$

则$P^*(s,t) = (p^*_{i,j}, \ i,j \in E \cup \{i^*\})$是满足(1.3)*的非时齐的转概阵，所以对$P^*(s, \ t)$而言，(1.46)、(1.47)、(1.48)成立，从而对$P(s,t)$而言(1.46)、(1.47)、(1.48)成立。

定理1.6. 若非时齐的准转概阵$P(s,t)$满足(1.3)*，且对任何$i \in E$，$A \subset E$，存在$r_0 = r_0(i,A) > 0$，使

$$\lim_{\rho \to 0}(p_{i,A}(s+\rho, \ t+\rho) - \delta_{i,A})/(p_{i,A}(s,t) - \delta_{i,A}) = 1^{1)} \quad (1.49)$$

（对$0 \leqslant t-s \leqslant r_0$一致成立），

则对任何$u \geqslant 0, i \in E$，$A \subset E$，(1.46)、(1.47)、(1.48)成立，而且$q_i(u)$、$q_{i,A}(u)$($i \bar{\in} A$)满足：

(i) 固定$i \in E$，$q_i(u)$是u的连续函数；

(ii) 固定$i \in E$，$A \subset E$，$i \bar{\in} A$，$q_{i,A}(u)$是u的连续函数；

(iii) 固定$i \in E$，$u \geqslant 0$，$i \bar{\in} A$，$q_{i,A}(u)$满足

$$q_{i,A}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{i,A_n}(u),$$

---

1) 此处$\frac{0}{0}$定义为1。

其中$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$，$A_n \cap A_m = \varnothing \ (m \neq n)$，$A_n \subset E$。

证 注意：(1.49)等价于

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{p_{i,A}(s,t)-\delta_{i,A}}{p_{i,A}(s+\rho,t+\rho)-\delta_{i,A}}=1，（对0\leqslant t-s\leqslant r_0一致）。\tag{1.49*}$$

任取$i\in E$，$A\subset E$固定。由(1.49)和(1.49)*得知：任给$\varepsilon>0$，存在$\rho_0>0$，当$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$0\leqslant t-s\leqslant r_0$有

$$\begin{aligned}&|p_{i,A}(s,t)-p_{i,A}(s+\rho,t+\rho)|\\ &\leqslant\min\{\varepsilon|\delta_{i,A}-p_{i,A}(s,t)|,\quad \varepsilon|\delta_{i,A}-p_{i,A}(s+\rho,t+\rho)|\}。\end{aligned}\tag{1.50}$$

今任取$u_0\geqslant 0$，总有ρ^*使$u_0+\rho^*\in[u_0,u_0+\rho]\cap\overline{N(i,A)}$，($\overline{N(i,A)}$之定义见定理1.5)从而由定理1.5得

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\frac{1}{t-s}(p_{i,A}(s+\rho^*,t+\rho^*)-\delta_{i,A})\\ &=\lim_{\substack{[s+\rho^*,t+\rho^*]\ni(u_0+\rho^*)\\(t-s)\to 0+}}\frac{1}{(t+\rho^*)-(s+\rho^*)}\\ &\quad\cdot(p_{i,A}(s+\rho^*,t+\rho^*)-\delta_{i,A})\\ &=q_{i,A-\{i\}}(u_0+\rho^*)-q_i(u_0+\rho^*)\delta_{i,A}\\ &\overset{\text{记作}}{=\!=}q_0^*\quad 存在且有限。\end{aligned}\tag{1.51}$$

因此，由(1.50)、(1.51)有

$$\begin{aligned}&\limsup_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}(p_{i,A}(s,t)-\delta_{i,A})\Big/(t-s)\\ &\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\left[\frac{p_{i,A}(s+\rho^*,t+\rho^*)-\delta_{i,A}}{(t-s)}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\varepsilon|\delta_{i,A}-p_{i,A}(s+\rho^*,t+\rho^*)|}{(t-s)}\right]\\ &=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\left[\frac{p_{i,A}(s+\rho^*,t+\rho^*)-\delta_{i,A}}{(t-s)}+\varepsilon|q_0^*|\right]\end{aligned}$$

$$\leqslant \liminf_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\left[\frac{p_{i,A}(s,t)-\delta_{i,A}}{(t-s)}+\varepsilon|q_0^*|+\varepsilon|q_0^*|\right]. \qquad (1.52)$$

由 $\varepsilon>0$可任意小，而 q_0^* 是有限数，$u_0\geqslant 0$可任意，用(1.52)、(1.51)得知(1.46)、(1.47)、(1.48)成立。

下面证明$q_i(u)$、$q_{i,A}(u)$满足(i)—(iii)。

(i) 由(1.50)有

$$\limsup_{\rho\to 0}|q_i(u)-q_i(u+\rho)|$$

$$\leqslant \limsup_{\rho\to 0}\left|\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{p_{i,i}(s+\rho,t+\rho)-p_{i,i}(s,t)}{t-s}\right|$$

$$\leqslant \limsup_{\rho\to 0}\left|\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{\varepsilon(1-p_{i,i}(s,t))}{t-s}\right|$$

$$=\varepsilon q_i(u),$$

而$\varepsilon>0$可以任意小，$q_i(u)$是有限数，所以$q_i(u)$是u的连续函数。

(ii) 仿(i)可证(ii)。

(iii) 参见[69]P.101(19)。

§ 2. 一致可微性及柯氏方程式

定理2.1. 若非时齐准转概阵$P(s,\ t)$ 满足

$$\lim_{(t-s)\to 0+}\inf p_{i,A}(s,\ t)=\delta_{i,A}, \qquad (2.1)$$

$(i\in E,\ A\subset E)$，则

(1) $$\lim_{\tau\to 0+}\sup_{t\geqslant\tau}\left(\frac{1-p_{i,i}\ (t-\tau,\ t)}{\tau}\right)$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}[1-\inf_{t\geqslant\tau}p_{i,i}(t-\tau,\ t)]$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}[1-\inf_{t\geqslant 0}p_{i,i}(t,\ t+\tau)]$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\sup_{t\geqslant 0}[1-p_{i,i}(t,\ t+\tau)]$$

记作 $\bar{q}_i$ (2.2)

存在（可能为$+\infty$）；

(2) $\inf\limits_{t\geq\tau} p_{i,i}(t-\tau, t)=\inf\limits_{t\geq 0} p_{i,i}(t, t+\tau)\geq e^{-\bar{q}_i\tau}$. (2.3)

证 令$f(\tau)=\sup\limits_{t\geq\tau}(-\log p_{i,i}(t-\tau, t))$，$(\tau\geq 0)$，则$f(\tau)$是$[0, \infty)$上的非负广义实值函数（添加了$\infty$的实数集称为广义实数集），由$(K-C)$方程式及定理假设得知$f(\tau)$满足：

(i) 半可加性：$f(u+v)\leqslant\sup\limits_{t\geq u+v}(-\log p_{i,i}(t-u-v, t-u))$

$+\sup\limits_{t\geq u+v}(-\log p_{i,i}(t-u, t))\leqslant\sup\limits_{t-u\geq v}(-\log p_{i,i}(t-u-v, t-u))$

$+\sup\limits_{t\geq u}(-\log p_{i,i}(t-u, t))=f(u)+f(v)$，$(u, v\geq 0)$，

(ii) 连续性：$\lim\limits_{v\to 0+}f(v)=-\log\lim\limits_{v\to 0+}\inf\limits_{t\geq v}p_{i,i}(t-v, t)=0$。

所以由第二篇引理3.1知：

$$\lim_{\tau\to 0+} f(\tau)/\tau=\sup_{\tau>0}\frac{f(\tau)}{\tau}=\bar{q}_i$$

存在（可能为$+\infty$）。因此

$$f(\tau)=\bar{q}_i\tau+o(\tau), \quad (\tau\to 0+), \tag{2.4}$$

$$f(\tau)\leqslant\bar{q}_i\tau, \quad (\tau\geq 0), \tag{2.5}$$

由(2.4)得$\inf\limits_{t\geq\tau} p_{i,i}(t-\tau, t)=e^{-f(\tau)}=e^{-\bar{q}_i\tau}+o(\tau)$，$(\tau\to 0+)$，

所以(1)得证。由(2.5)得(2)。

定理2.2. 对任何非时齐的准转概阵$p(s, t)$，任取$i\in E$，$A\subset E$，$i\bar{\in}A$，若

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0<s<t<b}}\sup_{j\in A}(1-p_{j;j}(s,t))=0, \quad (b>0)$$

则

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geq\tau} p_{i,A}(t-\tau, t)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geq 0}p_{i,A}(t,\ t+\tau)}{\tau}=\bar{q}_{i,A} \tag{2.6}$$

存在且有限。

证 任取$u>0$，$\tau>0$，令$n=\left[\frac{\tau}{u}\right]$，（$[a]$表不大于$a$的最大整数），取$[t-\tau,\ t]$的分割$\mathscr{D}(t-\tau,\ t)=\{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_{n+1}\}$，$r_j=t-\tau+ju$，$(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，$r_{n+1}=t$。由引理1.5知：对任何$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，任何$b>0$，存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,\ i,\ A,\ b)>0$，只要$0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$，$0\leqslant\tau\leqslant t<b$，就有

$$p_{i,A}(t-\tau,\ t)\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}p_{i,A}(t-\tau+(j-1)u,\ t-\tau+ju),$$

更有

$$\frac{1}{\tau}\inf_{t\geq\tau}p_{i,A}(t-\tau,\ t)$$

$$\geqslant\frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}\inf_{t\geq\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{p_{i,A}(t-\tau+(j-1)u,\ t-\tau+ju)}{u}$$

$$\geqslant\frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}\sum_{j=1}^{n}\inf_{t\geq\tau-(j-1)u}\frac{p_{i,A}(t-\tau+(j-1)u,\ t-\tau+ju)}{u}$$

$$=\frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}n\inf_{t\geq u}\frac{p_{i,A}(t-u,\ t)}{u}. \tag{2.7}$$

若注意$\lim\limits_{u\to 0}\frac{nu}{\tau}=1$，在(2.7)中先对$u\to 0+$取上极限，次对$\tau\to 0+$取下极限并注意$\varepsilon>0$可以任意小，即可得(2.6)成立且$\bar{q}_{i,A}$有限。

定理2.3. 对任何满足$(1.3)^*$（$(1.3)^*$的b此时为∞）的非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$，且$\inf\limits_{t\geq 0}p_{i,A}(t,\ t+\tau)$对$A$有有限可加性，则

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geq\tau} p_{i,A}(t-\tau,\ t)-\delta_{i,A}}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geq 0} p_{i,A}(t,\ t+\tau)-\delta_{i,A}}{\tau}$$

$$=-\delta_{i,A}\bar{q}_i+\bar{q}_{i,A-\{i\}},\quad (i\in E,\ A\subset E),\qquad (2.8)$$

此外，$\bar{q}_{i,A-\{i\}}$ 满足

$$\bar{q}_{i,A-\{i\}}=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{q}_{i,A_n-\{i\}},\qquad (2.9)$$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$，$A_n\cap A_m=\varnothing\quad(m\neq n)$。

证 由定理2.1、2.2即得本定理。

下面我们将要研究柯氏方程式。

定义2.1. 若非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$满足

$$(1)\ \lim_{t\to u+0}\frac{p_{i,j}(u,\ t)-\delta_{i,j}}{t-u}=\tilde{q}_{i,j}(u),\qquad (2.10)$$

$(u\geqslant 0,\ i\in E,\ j\in E)$ 存在且有限，

$$(2)\ \lim_{t\to u-0}\frac{p_{i,j}(t,\ u)-\delta_{i,j}}{u-t}=\tilde{q}_{i,j}(u),\qquad (2.11)$$

$(u>0,\ i\in E,\ j\in E)$，

(3) $0\leqslant\tilde{q}_{i,j}(u)<\infty\ (u\geqslant 0,\ i,\ j\in E,\ i\neq j)$，

$0\leqslant-\tilde{q}_{i,i}(u)<\infty$，$(u\geqslant 0,\ i\in E)$，

$\sum\limits_{j\in E}\tilde{q}_{i,j}(u)\leqslant 0$，$(u\geqslant 0,\ i\in E)$，则称$P(s,\ t)$是可微的，$\tilde{Q}(u)=(\tilde{q}_{i,j}(u),\ i,\ j\in E)$ 称为$P(s,\ t)$ 的转移强度矩阵，简称转强阵。

撇开非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$，任意一个满足条件(3)的$\widetilde{Q}(u)=(\widetilde{q}_{i,j}(u),i,\ j\in E)$,我们都称之为$E$上的一个非时齐的转强阵。若$\widetilde{q}_{i,j}(u)$在$u\geqslant 0$上连续$(i,\ j\in E)$，则称$\widetilde{Q}(u)$是连续的。

若非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$满足

$$(1)'\ \lim_{t\to u+0}\frac{p_{i,A}(u,\ t)-\delta_{i,A}}{t-u}=\widetilde{q}_{i,A}(u),\qquad (2.10)'$$

$(u\geqslant 0,\ i\in E,\ A\subset E)$ 存在且有限，

$$(2)'\ \lim_{t\to u-0}\frac{p_{i,A}(t,\ u)-\delta_{i,A}}{u-t}=\widetilde{q}_{i,A}(u),\qquad (2.11)'$$

$(u>0,\ i\in E,\ A\subset E)$，

(3)′ $0\leqslant\widetilde{q}_{i,A}(u)<\infty$, $(u\geqslant 0,\ i\in E,\ A\subset E,\ i\bar{\in}A)$, $0\leqslant-\widetilde{q}_{i,i}(u)<\infty$, $(u\geqslant 0,\ i\in E,\ \widetilde{q}_{i,i}(u)=\widetilde{q}_{i,\{i\}}(u))$, $\widetilde{q}_{i,E}(u)\leqslant 0$, $(u\geqslant 0,\ i\in E)$, $\widetilde{q}_{i,A}(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{q}_{i,A_n}(u)$, $(u\geqslant 0, i\in E, A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$; $A_n\cap A_m=\varnothing(m\neq n),\ A\subset E)$，则称$P(s,t)$是一致可微的，$\widetilde{q}_{i,A}(u)$称为$P(s,\ t)$的转移强度函数，简称转强函数. 撇开非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$，任意一个满足(3)′的$\widetilde{q}_{i,A}(u)$ $(u\geqslant 0,\ i\in E,\ A\subset E)$，我们都称之为$E$上的一个非时齐的转强函数. 若$\widetilde{q}_{i,A}(u)$对任何$i\in E,\ A\subset E$，都是$u$的连续函数，则称此非时齐的转强函数是连续的。

由定理1.6得知：满足(1.3)*和(1.49)的非时齐的准转概阵$P(s,\ t)$是一致可微的，其转移强度函数是连续的，而且

$$\widetilde{q}_{i,A}(u)=-\delta_{i,A}q_i(u)+q_{i,A-\{i\}}(u),$$

$(u\geqslant 0,\ i\in E,\ A\subset E)$。

引理2.1. 设$\{\mu_n,\ n\geqslant 1\}$是可测空间$(\mathscr{E},\ \mathscr{B})$上一串有限测

度，f_n，f是有界$\mathscr{B}$可测函数，$|f_n|\leqslant M$，$|f|\leqslant M$，$(n\geqslant 1)$，μ是$\mathscr{B}$上一个有限测度，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$，$(A\in\mathscr{B})$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu(dx)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} f_n(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu(dx)$。

证 由f有界可测得知存在简单函数(即值域为有限个点的可测函数) 列$\{g_m,\ m\geqslant 1\}$一致收敛到f。而

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu_n(dx)-\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu(dx)\right| \\
\leqslant&\left|\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu_n(dx)-\int_{\mathscr{E}} g_n(x)\mu_n(dx)\right| \\
&+\left|\int_{\mathscr{E}} g_m(x)\mu_n(dx)-\int_{\mathscr{E}} g_m(x)\mu(dx)\right| \\
&+\left|\int_{\mathscr{E}} g_m(x)\mu(dx)-\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu(dx)\right|. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

由$\mu_n\to\mu$，g_m是简单函数得知（2.12）右边第二项当$n\to\infty$时趋于0。由f、g_m一致有界，$g_m\to f$，μ是有限测度并应用控制收敛定理，(2.12) 右边第三项当$m\to\infty$时趋于0。又因为$\mu_n\to\mu$，μ_n，μ是有限测度，故存在$K>0$，使$\mu_n(\mathscr{E})\leqslant K$，(一切$n\geqslant 1$)，因此，

$$
\left|\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu_n(dx)-\int_{\mathscr{E}} g_m(x)\mu_n(dx)\right|\leqslant K\sup_{x\in\mathscr{E}}|f(x)-g_m(x)|,
$$

由$\{g_m,\ m\geqslant 1\}$一致收敛到f得知（2.12）右边第一项当$m\to\infty$时(对n一致地）趋于0。总之，在（2.12)中先令$n\to\infty$，次令$m\to\infty$即得(1)。

(2) $\left|\int_{\mathscr{E}} f_n(x)\mu_n(dx)-\int_{\mathscr{E}} f(x)\mu(dx)\right|$

$$\leqslant \left| \int_E f_n(x)\mu_n(dx) - \int_E f(x)\mu_n(dx) \right| + \left| \int_E f(x)\mu_n(dx) \right.$$

$$\left. - \int_E f(x)\mu(dx) \right|. \tag{2.13}$$

任给$\varepsilon>0$，由$f_n \to f$，$\mu(\mathscr{E})<\infty$，及叶果洛夫定理得知存在$A_0 \in \mathscr{B}$，$\mu(A_0)<\varepsilon$，使

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \overline{\in} A_0} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

而$\left| \int_E f_n(x)\mu_n(dx) - \int_E f(x)\mu_n(dx) \right| \leqslant \int_E |f_n(x) - f(x)| \mu_n(dx)$

$\leqslant 2M\mu_n(A_0) + \sup_{x \overline{\in} A_0} |f_n(x) - f(x)| \mu_n(\mathscr{E} - A_0)$.

令$n\to\infty$即得

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_E f_n(x)\mu_n(dx) - \int_E f(x)\mu_n(dx) \right|$$

$$\leqslant 2M\varepsilon, \tag{2.14}$$

由(1) 知(2.13) 右边第二项当$n\to\infty$时趋于0。再注意(2.14) 中之ε可任意小即得(2)。

定理2.4. 若非时齐的准转概阵$P(s, t)$是一致可微的，则

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{i,A}(s, t) = -\sum_{j\in E} \tilde{q}_{i,j}(s) p_{j,A}(s, t), \tag{2.15}$$

$(s\in[0, t], i\in E, A\subset E)$.

证 任取$s\in[0, t)$，$\Delta s>0$，$s+\Delta s\leqslant t$，我们有：

$$\frac{1}{\Delta s}(p_{i,A}(s+\Delta s, t) - p_{i,A}(s, t))$$

$$= \frac{1-p_{i,i}(s, s+\Delta s)}{\Delta s} p_{i,A}(s+\Delta s, t)$$

$$- \sum_{j\neq i} \frac{p_{i,j}(s, s+\Delta s)}{\Delta s} p_{j,A}(s+\Delta s, t),$$

由一致可微性假设及引理2.1和定理1.2得：

$$\lim_{\Delta s\to 0+}\frac{1}{\Delta s}(p_{i,A}(s+\Delta s,\ t)-p_{i,A}(s,\ t))$$

$$=-\sum_{j\in E}\widetilde{q}_{i,j}(s)p_{j,A}(s,\ t).$$

再取$s\in(0,\ t]$，$\Delta s>0$，$s-\Delta s\geqslant 0$，我们有

$$\frac{1}{\Delta s}(p_{i,A}(s,\ t)-p_{i,A}(s-\Delta s,\ t))$$

$$=\frac{1-p_{i,i}(s-\Delta s,\ s)}{\Delta s}p_{i,A}(s,t)$$

$$-\sum_{j\neq i}\frac{p_{i,j}(s-\Delta s,\ s)}{\Delta s}p_{j,A}(s,t),$$

所以，由一致可微性假设及引理2.1有

$$\lim_{\Delta s\to 0+}\frac{1}{\Delta s}(p_{i,A}(s,\ t)-p_{i,A}(s-\Delta s,\ t))$$

$$=-\sum_{j\in E}\widetilde{q}_{i,j}(s)p_{j,A}(s,\ t).$$

定理2.5. 在定理1.6的条件下，(2.15) 成立，而且

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{i,A}(s,\ t)$$

在$\mathscr{D}^*=\{(s,\ t)|0\leqslant s\leqslant t<\infty\}$上是$s$，$t$的二元连续函数.

证 由定理2.4及定理1.6即得 (2.15) 成立，且$\widetilde{q}_{i,A}(s)$ 在$s\geqslant 0$上连续，又因为由定理1.2得知$p_{i,A}(s,\ t)$ 对s来说在$s\in[0,t]$连续，而且这种连续对t还是等度的，所以，由引理2.1得知(2.15)右端是s的连续函数，而且这种连续对t来说是等度的. 而 (2.15) 右端对t来说在 $t\in[s,\ \infty)$ 上连续由定理1.2 及控制收敛定理即可得. 总之，(2.15) 右端在$\mathscr{D}^*$上是s，t 的二元连续函数.

定理2.6. 若一致可微的非时齐准转概阵$P(s,\ t)$满足(1.3)*及

$$\sup_{i\in E}|\bar{q}_i|\leqslant C<\infty，(\bar{q}_i\text{的定义见定理}2.1)\ (S)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{i,A}(s,\ t)=\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,\ t)\widetilde{q_{j,A}}(t),\qquad (2.16)$$

$(0\leqslant s\leqslant t<\infty,\ i\in E,\ A\subset E)$.

证 任取$0\leqslant s\leqslant t-\Delta t\leqslant t$，$\Delta t>0$，由定理2.1有

$$\frac{1}{\Delta t}(1-p_{j,j}(t-\Delta t,\ t))\leqslant\frac{1}{\Delta t}(1-\inf_{t\geqslant\Delta t}p_{j,j}(t-\Delta t,t))$$

$$\leqslant\frac{1}{\Delta t}(1-e^{-\bar{q}_j\Delta t})\leqslant\bar{q}_j\leqslant C,\qquad (2.17)$$

$(j\in E,\ \Delta t>0,\ t>0)$。类似地

$$\frac{1}{\Delta t}(1-p_{j,j}(t,\ t+\Delta t))\leqslant C,\quad (j\in E,\ \Delta t>0,$$

$$t\geqslant 0).\qquad (2.18)$$

由(2.17)、(2.18) 得

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ j\in E}}|\widetilde{q_{j,j}}(t)|\leqslant C,$$

从而

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0;\ j\in E\\ A\subset E}}|\widetilde{q_{j,A}}(t)|\leqslant C,\qquad (2.19)$$

由(2.19) 再利用引理2.1得

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\widetilde{q_{j,A}}(t)$$

$$=\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,\ t)\widetilde{q_{j,A}}(t).\qquad (2.20)$$

因此，

$$\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\frac{p_{i,A}(s,\ t)-p_{i,A}(s,\ t-\Delta t)}{\Delta t}\right.$$

$$\left.-\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,\ t)\widetilde{q_{j,A}}(t)\right|$$

$$\leqslant \limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\frac{p_{i,A}(s,\ t)-p_{i,A}(s,\ t-\Delta t)}{\Delta t}\right.$$

$$\left.-\sum_{j\in E}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\widetilde{q_{j,A}}(t)\right|$$

$$=\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\sum_{j\in A}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\left(\frac{p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)-1}{\Delta t}\right.\right.$$

$$\left.-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right)$$

$$\left.+\sum_{j\in E-A}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\left(\frac{p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)}{\Delta t}-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right)\right|. \tag{2.21}$$

但是，由(2.17)、(2.19) 有

$$\left|\frac{1}{\Delta t}(p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)-1)-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right|\leqslant 3C, \tag{2.22}$$

$(t>0,\ \Delta t>0,\ j\in A\subset E)$,

$$\left|\frac{1}{\Delta t}p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right|\leqslant 2C, \tag{2.23}$$

$(t>0,\ \Delta t>0,\ j\in E,\ j\overline{\in} A\subset E)$.

由 (2.22)、(2.23)、定理1.2及一致可微性假设并利用引理2.1有

$$\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\sum_{j\in A}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\left(\frac{p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)-1}{\Delta t}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right)\right|$$

$$=\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\sum_{j\in A}p_{i,j}(s,\ t-\Delta t)\left(\frac{p_{j,A}(t-\Delta t,\ t)}{\Delta t}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\widetilde{q_{j,A}}(t)\right)\right|=0.$$

以此代入(2.21)得

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{p_{i,A}(s,\ t)-p_{i,A}(s,\ t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t)\, \widetilde{q_{j,A}}(t),$$

$(0 \leqslant s < t < \infty,\ i \in E,\ A \subset E)$。

仿之可证（在用(2.17)的地方改用(2.18))：

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{p_{i,A}(s, t+\Delta t) - p_{i,A}(s, t)}{\Delta t}$$

$$= \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t)\, \widetilde{q_{j,A}}(t),$$

$(0 \leqslant s \leqslant t < \infty,\ i \in E,\ A \subset E)$。定理证毕。

定理2.7. 在定理1.6的条件下，若定理2.6的 (S) 成立，则(2.16)成立，而且 $\frac{\partial}{\partial t} p_{i,A}(s, t)$ 在 $\mathscr{D}^* = \{(s, t): 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ 上是 s，t 的二元连续函数。

证 在定理1.6的条件下，$p_{i,A}(s, t)$ 在 $\mathscr{D}^*$ 上是 s，t 的二元连续函数，$\widetilde{q_{j,A}}(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 连续；由条件 (S) 知 (2.19) 成立，所以，由引理2.1得

$$\lim_{\substack{(s,t)\to(s_0,t_0) \\ (s,t),(s_0,t_0)\in\mathscr{D}^*}} \sum_{j \in E} [p_{i,j}(s, t) - p_{i,j}(s_0, t_0)]\, \widetilde{q_{j,A}}(t) = 0,$$

$$\lim_{\substack{(s,t)\to(s_0,t_0) \\ (s,t),(s_0,t_0)\in\mathscr{D}^*}} \sum_{j \in E} p_{i,j}(s_0, t_0)[\widetilde{q_{j,A}}(t) - \widetilde{q_{j,A}}(t_0)] = 0,$$

总上二式知 (2.16) 右端在 $\mathscr{D}^*$ 上是 s，t 的二元连续函数，定理证毕。

§3. 非时齐的Q—过程的存在性

定义3.1. 设 $Q(t) = (q_{i,j}(t), i, j \in E)$ $(t \geqslant 0)$ 是一个连续的非时齐的转强阵，$q_{i,i}(t) = -q_i(t)$，(定义见定义2.1) 如果非时齐的准转概阵 $P(s, t)$ 满足

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{0\le s\le b}\left|\frac{1}{h}(p_{i,j}(s,\ s+h)-\delta_{ij})-q_{i,j}(s)\right|=0,$$

$(i,\ j\in E,\ 0\leqslant b<\infty)$，则称 $P(s,\ t)$是一个 Q—过程。若$Q(t)1\equiv 0$，则称$Q(t)$是保守的。若 Q—过程 $P(s,\ t)$ 是转概阵，即是 $P(s,\ t)1\equiv 1$，则称此Q—过程是不间断的或不断的。

容易证明：对任何Q—过程$P(s,\ t)$来说，恒有

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{h\le s\le b}\left|\frac{1}{h}(p_{i,j}(s-h,\ s)-\delta_{i,j})-q_{i,j}(s)\right|=0,$$

$(i,\ j\in E,\ 0<b<\infty)$。

事实上，用$q_{i,j}(u)$的连续性可得：

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{h\le s\le b}\left|\frac{1}{h}(p_{i,j}(s-h,\ s)-\delta_{i,j})-q_{i,j}(s)\right|$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\sup_{0\le t\le b-h}\left|\frac{1}{h}(p_{i,j}(t,\ t+h)-\delta_{i,j})-q_{i,j}(t)\right|$$

$$+\limsup_{h\to 0+}\sup_{0\le t\le b-h}|q_{i,j}(t)-q_{i,j}(t+h)|=0.$$

定理3.1. 对任何连续的非时齐的转强阵 $Q(t)=(q_{i,j}(t),\ i,\ j\in E)$，若$Q(t)1$对$t\geqslant 0$连续，则存在一个$Q$—过程。

证 令

$$\Delta(s,\ t)=diag(\exp\int_s^{s+t}q_{i,i}(u)du,\ i\in E),$$

$0\leqslant s\leqslant t<\infty$,

$D_{q(t)}=diag(-q_{i,i}(t),\ i\in E),\ 0\leqslant t<\infty$,

$S(t)=Q(t)+D_{q(t)},\ 0\leqslant t<\infty$,

$P_0(s,\ s+t)=\Delta(s,\ t),\ (0\leqslant s,\ t<\infty)$,

$$P_{n+1}(s,\ s+t)=\int_0^t\Delta(s,\ d)S(s+\alpha)P_n(s+\alpha,\ s+t)d\alpha,$$

$(n\geqslant 0,\ 0\leqslant s,\ t<\infty)$,

$$\overline{P}(s,\ s+t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(s,\ s+t),\ (0\leqslant s,\ t<\infty),$$

注意，如前所约定，我们如不特别申明，对矩阵比较大小、取极限、连续、微商、积分等都是逐元意义下的。往证$\overline{P}(s, s+t)$是一个Q—过程。

首先证明$\overline{P}(s, s+t)$是一个非时齐的准转概阵。显然$\overline{P}(s, s+t)\geqslant 0$，对$n$作归纳法可以证明$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(s, s+t)1\leqslant 1$，$(n\geqslant 0)$，从而$\overline{P}(s, s+t)1\leqslant 1$。事实上，$P_0(s, s+t)1=\Delta(s, t)1\leqslant 1$，若$\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu(s, s+t)1\leqslant 1$，则

$$\sum_{\nu=0}^{k+1} P_\nu(s, s+t)1=\Delta(s, t)1$$

$$+\int_0^t \Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu(s+\alpha, s+t)1d\alpha$$

$$\leqslant\Delta(s, t)1+\int_0^t\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)1d\alpha,$$

但是

$$S(s+\alpha)=Q(s+\alpha)+D_{q(s+\alpha)}, \quad Q_{(s+\alpha)}1\leqslant 0,$$

所以

$$\sum_{\nu=0}^{k+1} P_\nu(s, s+t)1\leqslant\Delta(s, t)1+\int_0^t\Delta(s, \alpha)D_{q(s+\alpha)}1d\alpha$$

$$\leqslant[diag(e^{\int_s^{s+t}q_{i,i}(u)du}-\int_0^t q_{i,i}(s+\alpha)\, e^{\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du}d\alpha,$$

$$i\in E)]1$$

$$=[diag(e^{\int_s^{s+t}q_{i,i}(u)du}+\{1-e^{\int_s^{s+t}q_{i,i}(u)du}\}, i\in E)]1$$

$$=1,$$

这就证明了$\overline{P}(s, s+t)1\leqslant 1$。现在我们来证明。

$$\overline{P}(s, s+t+u)=\overline{P}(s, s+t)\,\overline{P}(s+t, s+t+u). \tag{3.1}$$

先证对任何$n \geqslant 0$有

$$P_n(s, \ s+t+u) = \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(s, s+t) P_{n-\nu}(s+t, s+t+u), \tag{3.2}$$

事实上，$n=0$时，由$P_0(s, \ t)$的定义知(3.2)成立。设(3.2)对$n=k$时成立，则

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(s, \ s+t+u) &= \int_0^{t+u} \Delta(s, \ a) S(s+a) \\
&\quad \cdot P_k(s+a, \ s+t+u) da \\
&= \int_0^t \Delta(s, \ a) S(s+a) \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu(s+a, \ s+t) \\
&\quad \cdot P_{k-\nu}(s+t, \ s+t+u) da \\
&\quad + \int_t^{t+u} \Delta(s, \ a) S(s+a) P_k(s+a, \ s+t+u) da \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} P_{\nu+1}(s, \ s+t) P_{k-\nu}(s+t, \ s+t+u) \\
&\quad + \Delta(s, \ t) \int_0^u \Delta(s+t, \ a) S(s+t+a) \\
&\quad \cdot P_k(s+t+a, \ s+t+u) da \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} P_\nu(s, \ s+t) P_{k+1-\nu}(s+t, \ s+t+u)
\end{aligned}$$

归纳法完成。利用(3.2)及$\bar{P}(s, \ t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s, \ t)$可得(3.1)。

现在再证明

$$\lim_{h \to 0+} \sup_{0 < s < b} |\bar{P}_{i,j}(s, \ s+h) - \delta_{i,j}| = 0, \quad \binom{i, \ j \in E,}{0 < b < \infty},$$

其中$\bar{P}(s, \ t) = (\bar{p}_{i,j}(s, \ t), \ i, \ j \in E)$。因为

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(s, \ s+t) = \Delta(s, \ t)$$

$$+\int_0^t \Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(s+\alpha,\ s+t)d\alpha,$$

令$n\longrightarrow\infty$即得

$$\bar{P}(s,\ s+t)=\Delta(s,\ t)+\int_0^t \Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha) \cdot \bar{P}(s+\alpha,\ s+t)d\alpha \tag{3.3}$$

但是$q_{ij}(s)$在$s\geqslant 0$连续，$(i,\ j\in E)$，而且

$$\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\bar{P}(s+\alpha,\ s+t)\leqslant(f_{i,j}(s,\alpha),i,j\in E),$$

其中$f_{i,j}=f_{i,i}$，$(i,\ j\in E)$，

$$f_{i,i}(s,\ \alpha)=-q_{i,i}(s+\alpha)e^{-\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u)du},\ (i\in E).$$

所以，若令

$$e_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_i' 是 e_i 之转置,$$

（前i个分量为0）

则有

$$\limsup_{h\to 0+}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant b} |\bar{p}_{i,j}(s,\ s+h)-\delta_{i,j}|$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant b} \{|\delta_{i,j}e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u)du}-\delta_{i,j}| + e_i'(\int_0^h \Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\bar{P}(s+\alpha,s+h)d\alpha)e_j\}$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant b} \{|\delta_{i,j}e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u)du}-\delta_{i,j}| -\int_0^h q_{i,i}(s+\alpha)\ e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u)du} d\alpha\}=0.$$

这就证明了

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{0\leqslant s\leqslant b}|\bar{p}_{i,j}(s,\ s+h)-\delta_{i,j}|=0,\ \binom{i,\ j\in E,}{0\leqslant b<\infty}$$

而$\bar{P}(t,\ t)=I$ (I是单位矩阵)由 (3.3) 立得。总上所述，我们证明了$\bar{P}(s,\ t)$是一个非时齐的准转概阵。

其次，我们证明：

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{0\leqslant s\leqslant b}\left|\frac{\bar{p}_{i,j}(s,\ s+h)-\delta_{i,j}}{h}-q_{i,j}(s)\right|=0.$$

由(3.3)得

$$\frac{\bar{P}(s,\ s+h)-\bar{P}(s,s)}{h}$$

$$=\frac{\Delta(s,\ h)-I}{h}$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^h\Delta(s,\ a)S(s+a)\bar{P}(s+a,\ s+h)da. \tag{3.4}$$

若注意$Q(u)$连续，则可得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Delta(s,\ h)-I}{h}=-Dq(s), \tag{3.5}$$

在$s\in[0,\ b]$上一致成立，$0\leqslant b<\infty$。事实上，

$$\left|\frac{1}{h}(e^{\int_s^{s+h}q_{i,i}(u)du}-1-q_{i,i}(s)h)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\left[\int_s^{s+h}q_{i,i}(u)du-q_{i,i}(s)h\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_s^{s+h}q_{i,i}(u)du\right)^k\right]\right|,$$

所以，若令$M_i=\sup\limits_{s\in[0,b+1]}|q_{i,i}(s)|$，则有

$$\limsup_{h\to 0+}\sup_{s\in[0,b]}\left|\frac{1}{h}\left(e^{\int_s^{s+h}q_{i,i}(u)du}-1-q_{i,i}(s)h\right)\right|$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\frac{1}{h}\sup_{s\in[0,b]}\left\{\left|\int_s^{s+h}q_{i,i}(u)du-q_{i,i}(s)h\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(M_ih)^k}{k!}\right\}$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\sup_{s\in[0,b]}\left\{|q_{i,i}(s+\theta h)-q_{i,i}(s)|\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_i^k h^{k-1}}{k!}\right\},$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant 1$，所以由$q_{i,i}(s)$之连续性得知(3.5)对$s\in[0,\ b]$一致成立。

令

$$m_{i,j}(s,\ h)=e_i'\left(\frac{1}{h}\int_0^h\Delta(s,a)S(s+a)\bar{P}(s+a,s+h)da\right)e_j,$$

$$M(s,\ h)=(m_{i,j}(s,\ h),\ i,\ j\in E),$$

$$s_{i,j}(s)=e_i'S(s)e_j,$$

则

$$\sup_{s\in[0,b]}|m_{i,j}(s,\ h)-s_{i,j}(s)|$$

$$=\sup_{s\in[0,b]}\left|\frac{1}{h}\int_0^h\left[e^{\int_s^{s+a}q_{i,i}(u)du}\sum_{k\in E}s_{i,k}(s+a)\bar{p}_{k,j}(s+a_i,s+h)\right.\right.$$

$$\left.\left.-s_{i,j}(s)\right]da\right|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{0\leqslant a\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\left|\sum_{k\in E}e^{\int_s^{s+a}q_{i,i}(u)du}s_{i,k}(s)\bar{p}_{k,j}(s+a,s+h)\right.$$

$$\left.-s_{i,j}(s)\right|$$

$$+\sup_{\substack{0\leqslant a\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\left|\sum_{k\in E}e^{\int_s^{s+a}q_{i,i}(u)du}(s_{i,k}(s+a)\right.$$

$$-s_{i,k}(s))\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,\ s+h)\Big|$$

$$=\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\Big|\sum_{k\in E}s_{i,k}(s)\ (e^{\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du}\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,s+h)-\delta_{k,j})\Big|$$

$$+\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\Big|\sum_{k\in E}e^{\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du}(s_{i,k}(s+\alpha)$$

$$-s_{i,k}(s))\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,\ s+h)\Big|. \qquad (3.6)$$

现在我们来估计（3.6）右边两项。令第一项为$\eta_{i,j}^{(1)}(h)$，第二项为$\eta_{i,j}^{(2)}(h)$。若注意$q_{i,i}(s)$在$s\geqslant0$上连续，$\sum_{k\in E}s_{i,k}(s)\leqslant-q_{i,i}(s)$及$\bar{p}_{i,j}(s,\ t)$满足定义1.1中的(3)、(3)′、(3)″、(3)‴，则可知：对任何大于j的整数N，有

$$\limsup_{h\to0+}\eta_{i,j}^{(1)}(h)$$

$$\leqslant\limsup_{h\to0+}\sum_{k\leqslant N}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}s_{i,k}(s)\Big|e^{\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du}\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,$$

$$s+h)-\delta_{k,j}\Big|+\limsup_{h\to0+}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\sum_{k>N}s_{i,k}(s)$$

$$=\limsup_{h\to0+}\sum_{k\leqslant N}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}s_{i,k}(s)\,|\,\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,s+h)-\delta_{k,j}|$$

$$+\sup_{s\in[0,b]}\sum_{k>N}s_{i,k}(s)$$

$$\leqslant\limsup_{h\to0+}\sum_{k\leqslant N}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b+1]}}s_{i,k}(s)\,|\bar{p}_{k,j}(s+\alpha,s+h)-\delta_{k,j}|$$

$$+\sup_{s\in[0,b]}\sum_{k>N}s_{i,k}(s)=\sup_{s\in[0,b]}\sum_{k>N}s_{i,k}(s).$$

（上式对任何正整数$N>j$均成立），又因为$s_{i,k}(s)$在$s\in[0,\ b]$上连

续，$s_{i,k}(s)\geqslant 0$，$(s\in[0, b])$，而且 $\sum\limits_{k\in E} s_{i,k}(s)$也是连续函数，所以，由迪尼定理得知：$\sum\limits_{k\in E} s_{i,k}(s)$在$[0, b]$上一致收敛，从而

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{s\in[0,b]}\sum_{k>N} s_{i,k}(s)=0.$$

总上所述，我们证明了：

$$\lim_{h\to 0+}\eta_{i;j}^{(1)}(h)=0. \tag{3.7}$$

而

$$\limsup_{h\to 0+}\eta_{i,j}^{(2)}(h)$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\left|\sum_{k<N} e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u)du}(s_{i,k}(s+\alpha)-s_{i,k}(s))\right.$$

$$\left.\bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h)\right|$$

$$+\limsup_{h\to 0+}\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant h\\ s\in[0,b]}}\sum_{k>N}(s_{i,k}(s+\alpha)+s_{i,k}(s))$$

仿(3.7)可证

$$\lim_{h\to 0+}\eta_{i,j}^{(2)}(h)=0. \tag{3.8}$$

由(3.6)—(3.8)得：

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{s\in[0,b]}|m_{i,j}(s, h)-s_{i,j}(s)|=0, \tag{3.9}$$

亦即

$$\lim_{h\to 0+} M(s, h)=S(s)\ (\text{在}s\in[0, b]\text{上一致}), \tag{3.10}$$

由(3.4)、(3.5)、(3.10)得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\bar{P}(s, s+h)-\bar{P}(s, s))=Q(s),\ \text{在}s\in[0, b]$$

上一致成立。定理3.1证毕。

定理3.2. 设$Q(t)$是一个连续的保守的非时齐的转强阵，则对任何一个Q—过程$P(s,\ t)$来说，均有

(1) $$\frac{\partial}{\partial s}P(s,\ t)=-Q(s)P(s,\ t),\ (0\leqslant s\leqslant t<\infty),\tag{B}$$

而且$\frac{\partial}{\partial s}P(s,\ t)$当$t$固定时对$s$而言在$[0,\ t]$上连续；

(2) $$P(s,\ s+t)=\int_0^t \Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)P(s+\alpha,\ s+t)d\alpha + \Delta(s,\ t).\tag{B'}$$

证(1) (a) 首先证明：

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(P(s,\ t)-P(s-h,\ t))=-Q(s)P(s,\ t),$$
$$(0<s\leqslant t<\infty).$$

事实上，

$$\frac{1}{h}(p_{i,j}(s,\ t)-p_{i,j}(s-h,\ t))$$
$$=\frac{1}{h}(1-p_{i,i}(s-h,\ s))p_{i,j}(s,\ t)$$
$$-\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)p_{k,j}(s,\ t),\tag{3.11}$$

由法都引理有

$$\liminf_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)\geqslant\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s),\tag{3.12}$$

所以由$Q(t)$的保守性得

$$\limsup_{h\to 0+}\sum_{k\in E}\frac{\delta_{i,k}-p_{i,k}(s-h,\ s)}{h}\leqslant -q_{i,i}(s)-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)$$
$$=0,$$

但是

$$\sum_{k\in E}\frac{1}{h}(\delta_{i,k}-p_{i,k}(s-h,\ s))\geqslant 0,$$

因此

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\in E}\frac{1}{h}(\delta_{i,k}-p_{i,k}(s-h,\ s))=-\sum_{k\in E}q_{i,k}(s)=0,$$

更有

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)=\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s). \qquad (3.13)$$

所以

$$\left|\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)p_{k,j}(s,\ t)-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}}\left(\frac{p_{i,k}(s-h,\ s)}{h}-q_{i,k}(s)\right)p_{k,j}(s,\ t)\right|$$

$$+\sum_{\substack{k\neq i\\ k>N}}\frac{p_{i,k}(s-h,\ s)}{h}+\sum_{\substack{k\neq i\\ k>N}}q_{i,k}(s). \qquad (3.14)$$

由(3.13)、$\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)<\infty$及

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}q_{i,k}(s-h,\ s)=q_{i,k}(s),\ (i\neq k)$$

得知：任给$\varepsilon>0$，均存在一个N，使h充分接近于0以后，(3.14)右端第二项与第三项之和小于ε。N取定后，再在(3.14)中令$h\to 0+$得：

$$\limsup_{h\to 0+}\left|\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)p_{k,j}(s,\ t)\right.$$

$$\left.-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)\right|\leqslant\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$可任意小得知

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\frac{1}{h}p_{i,k}(s-h,\ s)p_{k,j}(s,\ t)$$

$$=\sum_{k\neq i} q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)。\tag{3.15}$$

由(3.11)、(3.15)得(a)。

(b) 其次我们证明

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(P(s+h,\ t)-P(s,\ t))=-Q(s)P(s,\ t),$$

$$(0\leqslant s<t<\infty)。$$

考虑$h>0$，$0\leqslant s<s+h\leqslant t<\infty$，

$$\frac{1}{h}(p_{i,j}(s+h,\ t)-p_{i,j}(s,\ t))$$

$$=\frac{1-p_{i,i}(s,\ s+h)}{h}p_{i,j}(s+h,\ t)$$

$$-\sum_{k\neq i}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}p_{k,j}(s+h,\ t)。\tag{3.16}$$

由法都引理得：

$$\liminf_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}\geqslant\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s),\tag{3.17}$$

所以

$$\liminf_{h\to 0^+}\sum_{k\in E}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)-\delta_{i,k}}{h}\geqslant\sum_{k\in E}q_{i,k}(s)=0。$$

但是

$$\sum_{k\in E}\frac{1}{h}\left(p_{i,k}(s,\ s+h)-\delta_{i,k}\right)\leqslant 0,$$

所以

$$\lim_{h\to 0^+}\sum_{k\in E}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)-\delta_{i,k}}{h}=\sum_{k\in E}q_{i,k}(s)=0,$$

更有

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{i,k}(s,s+h)}{h}=\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)。\tag{3.18}$$

但是

$$\limsup_{h\to 0+}\Big|\sum_{k\neq i}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}p_{k,j}(s+h,\ t)$$

$$-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)\Big|\leqslant\limsup_{h\to 0+}\Big|\sum_{k\neq i}\Big(\frac{p_{i,k}(s,s+h)}{h}$$

$$-q_{i,k}(s)\Big)p_{k,j}(s+h,\ t)\Big|+\limsup_{h\to 0+}\Big|\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)$$

$$\cdot(p_{k,j}(s+h,\ t)-p_{k,j}(s,\ t))\Big|,\qquad(3.19)$$

由定理1.2及$\sum\limits_{k\neq i}q_{i,k}(s)\leqslant-q_{i,i}(s)<\infty$，并应用控制收敛定理即得：

$$\limsup_{h\to 0+}\Big|\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)(p_{k,j}(s+h,t)-p_{k,j}(s,t))\Big|=0.$$

$$(3.20)$$

由(3.18)得知：对任何n，均存在N_n，$\delta_n>0$，使得$h<\delta_n$时有

$$\sum_{\substack{k\neq i\\ k\geqslant N_n}}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}<\frac{1}{n},\quad\sum_{\substack{k\neq i\\ k\geqslant N_n}}q_{i,k}(s)<\frac{1}{n}.$$

所以，当$h<\delta_n$时有

$$\Big|\sum_{k\neq i}\Big(\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}-q_{i,k}(s)\Big)p_{k,j}(s+h,\ t)\Big|$$

$$\leqslant\Big|\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N_n}}\Big(\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}-q_{i,k}(s)\Big)p_{k,j}(s+h,\ t)\Big|+\frac{2}{n}.$$

$$(3.21)$$

在(3.21)中先令$h\to 0+$，次令$n\to\infty$即得：

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\Big(\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}-q_{i,k}(s)\Big)p_{k,j}(s+h,\ t)=0.$$

$$(3.22)$$

由(3.19)、(3.20)、(3.22)得：

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{i,k}(s,\ s+h)}{h}p_{k,j}(s+h,\ t)$$

$$=\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)。\tag{3.23}$$

由定理1.2及(3.16)、(3.23)得：

$$\lim_{h\to 0+}\frac{P(s+h,\ t)-P(s,\ t)}{h}=-Q(s)P(s,\ t)。$$

(c) 最后我们证明：$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t)$当$t$固定时对$s$在$[0,t]$上连续。若注意(a)、(b)及定理1.2和$Q(s)$对$s$连续，为证(c)，只须证明$\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,t)$当$t$固定时对$s$在$[0,\ t]$上连续($i,\ j\in E$)。事实上，

$$\left|\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,\ t)-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s-h)p_{k,j}(s-h,\ t)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)(p_{k,j}(s,\ t)-p_{k,j}(s-h,\ t))\right|$$

$$+\left|\sum_{k\neq i}(q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h))p_{k,j}(s-h,\ t)\right|。\tag{3.24}$$

由定理1.2及控制收敛定理得知(3.24)右端第一项当$h\to 0$(当$s=0$时自然要求$h\leqslant 0$)时趋于0。而第二项小于等于$\sum_{k\neq i}|q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h)|$。

又

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s-h)=-\lim_{h\to 0}q_{i,i}(s-h)=-q_{i,i}(s)$$

$$=\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)<\infty,$$

所以，对任何n，均存在N_n及$\delta_n>0$，使$|h|<\delta_n$时有

$$\sum_{\substack{k\neq i\\ k\geq N_n}}\left|q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h)\right|<\frac{1}{n}. \tag{3.25}$$

所以当$|h|<\delta_n$时有：

$$\sum_{k\neq i}\left|q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h)\right|$$

$$\leqslant\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N_n}}\left|q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h)\right|+\frac{1}{n}. \tag{3.26}$$

在(3.26)中先令$h\to 0$，次令$n\to\infty$并注意$q_{i,j}(s)$对s的连续性即得：

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\left|q_{i,k}(s)-q_{i,k}(s-h)\right|=0. \tag{3.27}$$

总上所述，我们证明了：

$$\lim_{h\to 0}\left|\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s)p_{k,j}(s,t)-\sum_{k\neq i}q_{i,k}(s-h)p_{k,j}(s-h,t)\right|=0.$$

亦即(c)得证。(1)证毕。

(2) 最后证明$P(s,\ t)$满足$(B)'$。事实上，利用(1)及分部积分可得：

$$\int_0^t\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)P(s+\alpha,\ s+t)d\alpha$$

$$=\int_0^t\Delta(s,\alpha)[Q(s+\alpha)P(s+\alpha,s+t)+D_{q(s+\alpha)}P(s+\alpha,s+t)]d\alpha$$

$$=-\int_s^{s+t}\Delta(s,\ \alpha-s)\frac{\partial}{\partial\alpha}P(\alpha,\ s+t)d\alpha$$

$$+\int_0^t\Delta(s,\alpha)Dq_{(s+\alpha)}P(s+\alpha,s+t)d\alpha$$

$$=-[\Delta(s,t)P(s+t,s+t)-\Delta(s,0)P(s,s+t)$$

$$+\int_s^{s+t}D_{q(\alpha)}\Delta(s,\ \alpha-s)P(\alpha,s+t)d\alpha]$$

$$+\int_0^t \Delta(s, \alpha) D_{q(s+\alpha)} P(s+\alpha, s+t) d\alpha$$

$$= -\Delta(s, t) + P(s, s+t).$$

定理3.2证毕。

引理3.1. 设$Q(t)=(q_{i,j}(t), i, j\in E)$是任一连续的非时齐的转强阵，$P(s, t)=(p_{i,j}(s, t), i, j\in E)$是任一$Q$—过程，则

$$p_{i,i}(s, t)\geqslant e^{\int_s^t q_{i,i}(u)du}, \quad (i\in E, 0\leqslant s\leqslant t<\infty). \tag{3.28}$$

证 因为

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\Big(1-p_{i,i}(t-h, t)\Big)=-q_{i,i}(t)$$

对$t\in(0, b]$一致成立。所以存在$\varepsilon_i(h)$(不依赖于$t\in(0, b]$)，使

$$\lim_{h\to 0+}\varepsilon_i(h)=0, \quad |1-p_{i,i}(t-h, t)+hq_{i,i}(t)|<\varepsilon_i(h)h.$$

特别地，取$\tau=t-s$就有

$$p_{i,i}\Big(s+\frac{j-1}{n}\tau, s+\frac{j}{n}\tau\Big)\geqslant 1+q_{i,i}\Big(s+\frac{j}{n}\tau\Big)\frac{\tau}{n}$$

$$-\varepsilon_i\Big(\frac{\tau}{n}\Big)\frac{\tau}{n}, \qquad (1\leqslant j\leqslant n).$$

所以(因$q_{i,i}(s)$连续，$\varepsilon_i(h)\to 0$，($h\to 0$时)，故n充分大后上式右端非负)，

$$p_{i,i}(s, t)\geqslant \prod_{j=1}^n p_{i,i}\Big(s+\frac{j-1}{n}\tau, s+\frac{j}{n}\tau\Big)$$

$$\geqslant\prod_{j=1}^n\Big(1+q_{i,i}\Big(s+\frac{j}{n}\tau\Big)\frac{\tau}{n}-\varepsilon_i\Big(\frac{\tau}{n}\Big)\frac{\tau}{n}\Big). \tag{3.29}$$

在(3.29)中令$n\to\infty$即得(3.28)．事实上，若令$M_i=\sup\limits_{u\in[s,t]}|q_{i,i}(u)|$，则

$$e^{q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n}}\leqslant 1+q_{i,i}\Big(\frac{j}{n}\tau\Big)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Big|q_{i,i}\Big(\frac{j}{n}\tau\Big)\frac{\tau}{n}\Big|^k}{k!}$$

$$\leqslant 1 + q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n} + M_i\frac{\tau}{n}\left(e^{\left|q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n}\right|} - 1\right)$$

$$\leqslant 1 + q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n} + M_i\frac{\tau}{n}\left(e^{M_i\tau/n} - 1\right)$$

$$\leqslant 1 + q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n} + \eta_i\left(\frac{\tau}{n}\right)\frac{\tau}{n}, \tag{3.30}$$

其中$\eta_i\left(\frac{\tau}{n}\right) \geqslant 0$不依赖$j$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_i\left(\frac{\tau}{n}\right) = 0$。

由(3.29)、(3.30)得：

$$p_{i,i}(s,t) \geqslant \prod_{j=1}^{n}\left\{e^{q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right)\frac{\tau}{n}} - \left[\varepsilon_i\left(\frac{\tau}{n}\right) + \eta_i\left(\frac{\tau}{n}\right)\right]\frac{\tau}{n}\right\},$$

所以，由$q_{i,i}(u)$对u连续，在上式中令$n\to\infty$即得(3.28)。

定理3.3. 设$Q(t)$是一个连续的保守的非时齐的转强阵，则定理3.1中构造出来的Q—过程$\bar{P}(s, t)$是最小的Q—过程，即是说，对任何Q—过程$P(s, t)$，恒有

$$P(s, t) \geqslant \bar{P}(s, t)。$$

证 设$P_n(s, t)$、$\bar{P}(s, t)$如定理3.1所定义。由引理3.1有

$$P(s, t) \geqslant P_0(s, t)。$$

若$P(s, t) \geqslant \sum\limits_{\nu=0}^{n} P_\nu(s, t)$，则由定理3.2有

$$P(s, s+t) = \int_0^t \Delta(s,\alpha)S(s+\alpha)P(s+\alpha, s+t)d\alpha + \Delta(s,t)$$

$$\geqslant \Delta(s, t) + \int_0^t \Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(s+\alpha, s+t)d\alpha$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} P_\nu(s, s+t), \quad (0 \leqslant s, t < \infty).$$

所以，对任何n，都有$P(s, t) \geqslant \sum\limits_{\nu=0}^{n} P_\nu(s, t)$。

令$n\to\infty$即得定理3.3。

§4. 非时齐的Q—过程的唯一性.

设$P(s, t)$是一个非时齐的准转概阵. 由定理1.2, 当s固定时, $P(s, t)$在$t\in[s, \infty)$上右连续, 所以可以考虑$P(s, t)$的拉氏变换如下:

$$R(\lambda, s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(s, s+t)dt, \quad (\lambda>0, s\geqslant 0). \tag{4.1}$$

设$P_n(s, t)$, $\bar{P}(s, t)$, $\Delta(s, \alpha)$, $S(s)$如定理3.1所定义, 令

$$R_n(\lambda, s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_n(s, s+t)dt, (\lambda>0, s\geqslant 0), \tag{4.2}$$

$$\bar{R}(\lambda, s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar{P}(s, s+t)dt, (\lambda>0, s\geqslant 0). \tag{4.3}$$

引理4.1. 恒有

(1) $R_{n+1}(\lambda, s)=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)R_n(\lambda, s+\alpha)d\alpha$, $(n\geqslant 0)$

(2) $\bar{R}(\lambda, s)=R_0(\lambda, s)+\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)\bar{R}(\lambda, s+\alpha)d\alpha$.

证
$$\begin{aligned}R_{n+1}(\lambda, s)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_{n+1}(s, s+t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)P_n(s+\alpha, s+t)d\alpha dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)P_n(s+\alpha, s+\alpha+t)dt\right]d\alpha\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s, \alpha)S(s+\alpha)R_n(\lambda, s+\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

(1)得证. 若注意上式右端被积函数非负, 则把上式对n从0到∞求和即得(2).

引理4.2. 设$R(\lambda, s)$是非时齐的准转概阵$P(s, t)$的拉氏变换, 则$P(s, t)$是转概阵的充要条件是$\lambda R(\lambda, s)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}$.

证 必要性显然成立. 往证充分性. 若$\lambda R(\lambda, s)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}$, 则

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}(1-P(s,\ s+t)1)dt=0,$$

但是，由定理1.2知：$1-P(s,\ s+t)1$ 对t右连续，所以，由拉氏变换的唯一性(参看[68]P.46)得知

$$1-P(s,\ s+t)1\equiv 0.$$

引理4.3. 设$P(s,\ t)$是一个满足$(B)'$的Q—过程，则其拉氏变换$R(\lambda,\ s)$满足

$$R(\lambda,\ s)=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\alpha)[S(s+\alpha)R(\lambda,s+\alpha)+I]d\alpha,\ (B_\lambda)$$

其中$\lambda>0$，$s\geqslant 0$。

证 由$(B)'$有

$$R(\lambda,s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^t \Delta(s,\alpha)S(s+\alpha)P(s+\alpha,s+t)d\alpha + \Delta(s,\ t)\right]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_\alpha^\infty e^{-\lambda t}\Delta(s,\alpha)S(s+\alpha)P(s+\alpha,s+t)dt\right]d\alpha + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta(s,\ t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\alpha)S(s+\alpha)\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(s+\alpha,s+\alpha+t)dt\right]d\alpha + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta(s,\ t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)(S(s+\alpha)R(\lambda,\ s+\alpha)+I)d\alpha.$$

定理4.1. 设$Q(t)$是一个连续的保守的非时齐的转强阵，则

$$\bar{y}(\lambda,\ s)\equiv 1-\lambda\bar{R}(\lambda,\ s)1,\qquad (\lambda>0,\ s\geqslant 0)$$

是

$$\begin{cases} y(\lambda,\ s)=\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)y(\lambda,\ s+\alpha)d\alpha, \\ y(\lambda,\ \cdot)\in\mathscr{X}, \qquad\qquad (\lambda>0,\ s\geqslant 0)\end{cases}$$

的最大解，其中$y(\lambda,\ \cdot)$表示λ固定，$y(\lambda,\ s)$考虑成s的函数，

$$\mathscr{X}=\left\{y(s)\,\middle|\,y(s)=\begin{pmatrix}y_0(s)\\y_1(s)\\\vdots\end{pmatrix},0\leqslant y_i\leqslant 1,\ y_i\text{ 是勒贝格可测函数}\right\}.$$

证 首先我们证明

$$\mathbf{1}-\lambda R_0(\lambda,\ s)\mathbf{1}-\int_0^{\infty}e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\mathbf{1}d\alpha=0. \tag{4.4}$$

事实上，(4.4)左边之列向量对应于i的分量为

$$\int_0^{\infty}\Big[\lambda e^{-\lambda\alpha}-\lambda\exp\Big(-\lambda\alpha+\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du\Big)$$

$$+q_{i,i}(s+\alpha)\exp\Big(-\lambda\alpha+\int_s^{s+\alpha}q_{i,i}(u)du\Big)\Big]d\alpha$$

$$=\int_0^{\infty}\Big[\lambda e^{-\lambda\alpha}-(\lambda-q_{i,i}(s+\alpha))\exp\Big(-\int_s^{s+\alpha}(\lambda-q_{i,i}(u))du\Big)\Big]d\alpha$$

$$=1+\int_0^{\infty}d\Big[\exp\Big(-\int_s^{s+\alpha}(\lambda-q_{i,i}(u))du\Big)\Big]=0.$$

所以，由(4.4)及引理4.1得：

$$\bar{y}(\lambda,\ s)=\mathbf{1}-\lambda\bar{R}(\lambda,\ s)\mathbf{1}$$

$$=\mathbf{1}-\lambda R_0(\lambda,\ s)\mathbf{1}$$

$$-\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\bar{R}(\lambda,\ s+\alpha)\mathbf{1}d\alpha$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\mathbf{1}d\alpha$$

$$-\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\bar{R}(\lambda,\ s+\alpha)\mathbf{1}d\alpha$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\bar{y}(\lambda,\ s+\alpha)d\alpha.$$

显然$\bar{y}(\lambda,\ \cdot)\in\mathscr{X}$，$(\lambda>0)$。若$y(\lambda,\ \cdot)\in\mathscr{X}$，$(\lambda>0)$，$y(\lambda,\ \cdot)$满足

$$y(\lambda,\ s)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)y(\lambda,\ s+\alpha)d\alpha,$$

$$(\lambda>0,\ s\geqslant 0),$$

则由(4.4)得

$$\begin{aligned} y(\lambda,\ s)&=1-\lambda R_0(\lambda,\ s)1\\ &+\int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)(y(\lambda,\ s+\alpha)-1)d\alpha\\ &\leqslant 1-\lambda R_0(\lambda,\ s)1. \end{aligned}$$

设$y(\lambda,\ s)\leqslant 1-\lambda\sum\limits_{k=0}^{n}R_k(\lambda,\ s)1$，则由引理4.1有

$$\begin{aligned} y(\lambda,\ s)&\leqslant 1-\lambda R_0(\lambda,\ s)1\\ &\quad-\int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)\sum_{k=0}^{n}\lambda R_k(\lambda,\ s+\alpha)1d\alpha\\ &=1-\lambda\sum_{k=0}^{n+1}R_k(\lambda,\ s)1. \end{aligned}$$

所以

$$y(\lambda,\ s)\leqslant 1-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}R_k(\lambda,\ s)1=\bar{y}(\lambda,\ s).$$

定理证毕。

定理4.2. 设$Q(t)$是一个连续的保守的非时齐的转强阵，则恰有唯一一个Q—过程且不断的充要条件是：

$$\begin{cases} y(\lambda,\ s)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\Delta(s,\ \alpha)S(s+\alpha)y(\lambda,\ s+\alpha)d\alpha,\\ y(\lambda,\ \cdot)\in\mathscr{X} \qquad\qquad (\lambda>0,\ s\geqslant 0) \end{cases}$$

只有零解。

证 由引理4.2及定理4.1即得定理4.2。

参 考 文 献

〔1〕 K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.

〔2〕 J. G. Kemeny, J. L. Snell, A. W. Knapp, Denumerable Markov Chains, Springer-Verlag, 1976, (Second edition).

〔3〕 M. L. Silverstein, Symmetric Markov Processes, Springer-Verlag, 1974.

〔4〕 D. L. Isaacson, R. W. Madson, Markov Chains Theory and Applications, New york, 1976.

〔5〕 F. Spitzer, Principles of Random Walk, Princeton, New Jersey, 1964.

〔6〕 T. A. Сарымсаков, Основы Теорйй Процессов Маркова, Москва, 1954.

〔7〕 Е. Б. Дынкйн, Маркеовкйе Процессы, Москва,1963.

〔8〕 Е. Б. Дынкйн, 马尔可夫过程论基础,科学出版社,北京, 1962。(王梓坤译)。

〔9〕 Е. Б. Дынкйн, Гранйчная Теорйя для Марковскйх Процессов. (Дйскретный Случай), У. М. Н. ,24, вып. 2 (146), 1969, 3—42.

〔10〕 J. L. Doob, Stochastic Processes, New york, 1953.

〔11〕 J. L. Doob, Markov Chains — Denumerable Case, Tran. Amer. Math. Soc., 58(1945),455—473.

〔12〕 J. L. Doob, Discrete Potential Theory and Boundaries, J. of Math. and Mech., 8:3 (1959), 433—458.

〔13〕 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, 北京, 1965.

〔14〕 王梓坤, On Distribution of Functious of Birth and Death Processes and Their Applicatious in the Theory of Queues,

Scientia Sinica (中国科学), X:2(1961), 160—170.

〔15〕 王梓坤, The Martin Boundary and Limit Theorems for Excessive Functions, Scientia Sinica (中国科学), XIV:8 (1965), 1118—1129.

〔16〕 王梓坤, 生灭过程与马尔科夫链,科学出版社,北京, 1980.

〔17〕 王梓坤, 生灭过程的遍历性与零一律, 南开大学学报(自然科学), 5:5(1964), 89—94.

〔18〕 吴立德, 可数马尔可夫过程状态的分类, 数学学报, 15:1 (1965), 32—41.

〔19〕 吴立德, 齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布, 数学学报, 13:1 (1963), 86—93.

〔20〕 侯振挺, 郭青峰, 齐次可列马尔可夫过程, 科学出版社, 北京, 1978.

〔21〕 侯振挺, Q过程的唯一性准则, 中国科学, 2(1974), 115—130.

〔22〕 侯振挺, 郭青峰, 齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论, 数学学报, 19:4(1976), 239—262.

〔23〕 侯振挺, 齐次可列马尔可夫过程的样本函数的构造, 中国科学, 3(1975), 259—266.

〔24〕 钱敏, 侯振挺等, 可逆马尔可夫过程, 湖南科学技术出版社, 长沙, 1979.

〔25〕 杨超群, 关于生灭过程论的注记, 数学学报, 15:2(1965), 173—187.

〔26〕 杨超群, 生灭过程的性质, 数学进展, 9:4 (1966), 365—380.

〔27〕 杨超群, 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质, 数学进展, 7:4 (1964), 397—424.

〔28〕 杨向群, 可列马尔可夫过程的W变换和强极限, 中国科学, 7:9 (1979), 835—848.

〔29〕 杨向群, 一类生灭过程, 数学学报, 15 (1965), 9—31.

〔30〕 杨向群, 柯氏向后微分方程组的边界条件, 数学学报, 16 (1966), 429—452.

〔31〕 杨向群，可列马尔科夫过程构造论，湖南科学技术出版社，长沙，1979.

〔32〕 刘文，关于可列齐次马氏链转移概率的强大数定律，数学学报，21:3(1978)，231—242.

〔33〕 许宝騄，欧氏空间上纯间断的时齐的马尔可夫过程的转移函数的可微性，北京大学学报（自然科学版），4:3(1958)，257—270.

〔34〕 朱成熹，非时齐马尔可夫链的转移函数的分析性质，数学进展，8:1(1965)，34—54.

〔35〕 李志阐，半群与马尔科夫过程齐次转移函数的微分性质，数学进展，8:2 (1965)，153—160.

〔36〕 D. G. Kendall, Some Analgtical Properties of Continuous Stationary Markov Transition Functions, Tran. Amer. Math. Soc, 78(1955), 529—540.

〔37〕 D. G. Austin, On the Existence of Derivatives of Markoff Transition Probability Functions, proc. Nat. Acad. Soci. U. S. A., 41(1955), 224—226.

〔38〕 S. Karlin, J. L. Mc Gregor, The Differential Equations of Birth and Death Processes and the Stieltjes Moment Problem, Tran. Amer. Math. Soc., 85(1957), 489—546.

〔40〕 S. Karlin, J. L. McGregor, The Classification of Birth and Death Processes, Tran. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 366—400.

〔41〕 T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer-Verlag, 1963.

〔42〕 Б. А. Севастьянов, Теория Ветвящихся Случаиных Процессов, Y. M. H., 6(1951), 47—99.

〔43〕 Б. А. Севастьянов, Ветвящиеся Случаиные Нроцессы для Частиц,Диффундирующих в Ограниченной Области с Поглощающими Границами, Теория Веро. и её Примен.,3(1958), 121—136.

〔44〕 Б. А. Севастьянов, Переходные Явления в Ветвящихся Случаиных Процессы, Теория Веро. и её Примен., 4(1959),

121—135

〔45〕 M. Donsker, An Invariance Principle for Certain Probability Limit Theorems, Memoirs of Amer. Math. Soc, No. 6, 1951.

〔46〕 P. Billingsley, The Invariance Principle for Dependent Random Variables, Tran. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 250—268.

〔47〕 胡迪鹤，不变原理及其在分枝过程中的应用，北京大学学报（自然科学版），10:1（1964），1—27.

〔48〕 胡迪鹤，可数的马尔可夫过程的构造理论，北京大学学报（自然科学版），11:2（1965），111—143.

〔49〕 胡迪鹤，非时齐的可数状态的Q—过程的存在性及唯一性，数学学报，21:3（1978），285—287；或武汉大学学报（自然科学版），1980，7—25.

〔50〕 胡迪鹤，关于某些随机阵的调和函数，数学学报，22:3（1979），276—290.

〔51〕 胡迪鹤，随机调控无穷维分枝过程论（I），武汉大学学报（自然科学版），1978，第一期1—12.

〔52〕 胡迪鹤，随机调控无穷维分枝过程论（II），武汉大学学报（自然科学版），1978，第二期，8—16.

〔53〕 胡迪鹤，随机调控分枝过程的退化概率、两极分化及增殖速度，武汉大学学报（自然科学版），数学专刊，1981，第一期，53—68.

〔54〕 胡迪鹤，可逆的马尔可夫核，武汉大学学报（自然科学版），数学专刊，1980年第一期，63—82.

〔55〕 胡迪鹤，关于可数状态的马尔可夫过程的遍历极限，武汉大学学报（自然科学版），数学专刊，1980年第一期，49—62.

〔56〕 胡迪鹤，马尔可夫链的泛函的极限分布，武汉大学学报（自然科学版），1977第三期，63—79.

〔57〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes and the Associated Contraction Semigroup on l, Acta. Math., 97 (1957), 1—46.

〔58〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes (II),

J. London Math. Soc., 34(1959), 81—91.

[59] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes (III). J. London Math. Soc., 37(1962), 63—73.

[60] D. Isaacson and G. R. Luecke, Strongly Ergodic Markov Chains and Rates of Convergence Using Spectral Conditions, Stochastic Processes and Their Applications, 7 (1978) 113—121.

[61] J. F. C. Kingman, The Exponential Decay of Markov Transition Probabilities, Proc. London Math. Soc., 13(1963), 337—358.

[62] J. F. C. Kingman, Ergodic Properties of Continuous-Time Markov Processes and Their Discrete Skeletons, Proc. London Math. Soc., 13(1963), 593—604.

[63] D. G. Kendall, Unitary Dilations of Markov Transition Operators and The Corresponding Integral Representations for Transition Probability Matrices, In: U. Grenander Ed., Probability and Statistics, New york, 1959.

[64] R. V. Chacon and D. S. Ornstein, A General Ergodic Theorem, Illinois J. Math., 4(1960), 153—160.

[65] A. M. Яглом, The Ergodic Principle for Markov Processes with Stationary Distribution, Д. A. H. (C. C. C. P.) 54 (1947), 347—349.

[66] C. E. Richart, General Theory of Banach Algebras, New York, 1960.

[67] R. Syski, Ergodic Potential, Stochastic Processes and Their Applications, 7(1978), 311—336.

[68] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1946.

[69] M. Loéve, Probability Theory, New York, 1955.

[70] E. Hille, Functional Analysis and Semigroups, New York, 1948.

[71] G. A. Hunt, Markoff Chains and Martin Boundaris.

Illinois J. of Math. and Mech., 8:3(1959), 433—458.

〔72〕 W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications (V. I), New York, 1951.